La Traccia

Saggio di algebra lineare, meccanica quantistica, filosofia e teoria della conoscenza

---

I. Il Funzionale Traccia: Invarianza, Informazione, Estrazione

I.1. Una definizione elementare e una conseguenza non ovvia

Sia K un campo — per le applicazioni più immediate si pensi a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ — e sia M (K) l'algebra delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in K. Il *funzionale traccia* è la funzione lineare

$$\mathrm{tr} : M(K) \to K$$

definita dall'equazione

$$\mathrm{tr}(A) = \Sigma_{i=1}^{n} A_{ii}$$

dove A_{ii} denota l'elemento diagonale di posto (i, i). La definizione è di un'immediatezza quasi sospetta: si sommano gli elementi sulla diagonale principale e si ottiene uno scalare. Nulla, in questa operazione, sembra esigere un commento teorico prolungato. Eppure da questa definizione si diramano conseguenze di profondità crescente, e la prima di queste merita di essere percorsa con attenzione prima di muovere verso gli sviluppi più ricchi.

La proprietà fondamentale della traccia non è la linearità — che si verifica per ispezione immediata — bensì la sua *invarianza sotto coniugazione*. Se $P \in M(K)$ è una matrice invertibile, allora

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

per ogni $A \in M(K)$. La dimostrazione si ottiene dalla proprietà di ciclicità della traccia, che è a sua volta una conseguenza della definizione combinata con la regola di

moltiplicazione matriciale. Si ha infatti, per qualunque coppia di matrici $A \in M_{x}\square(K)$ e $B \in M_{x}\square(K)$:

$$\mathrm{tr}(AB) = \Sigma_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{=1}^{n} A_i\square B_i = \Sigma_{=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} B_i A_i\square = \Sigma_{=1}^{n} (BA) = \mathrm{tr}(BA)$$

Lo scambio dei due indici di sommazione è legittimo perché la somma è finita. Ne segue che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ per qualsiasi coppia di matrici per cui entrambi i prodotti siano definiti e quadrati. Applicando questo risultato con A sostituito da $P^{-1}A$ e B sostituito da P:

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}((PP^{-1})A) = \mathrm{tr}(I\ A) = \mathrm{tr}(A)$$

L'invarianza sotto coniugazione ha una conseguenza concettuale di rilievo: la traccia non è una proprietà della *matrice* come tale, ma della *trasformazione lineare* che essa rappresenta. Matrici diverse che rappresentano la stessa trasformazione lineare rispetto a basi diverse sono legate da trasformazioni di similitudine, e la traccia è la stessa per tutte. In altri termini, $\mathrm{tr}(A)$ è un invariante dell'endomorfismo $f : K^n \to K^n$ di cui A è una rappresentazione matriciale in una base qualsiasi, indipendentemente dalla scelta della base.

I.2. La traccia come somma degli autovalori

Il legame tra la traccia e il polinomio caratteristico illumina ulteriormente il suo statuto di invariante intrinseco. Il *polinomio caratteristico* di una matrice $A \in M(K)$ è il polinomio di grado n in un'indeterminata λ definito da

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Sviluppando il determinante, si ottiene un polinomio della forma

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\,\lambda^{n-1} + c_2\,\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \det(A)$$

dove i coefficienti intermedi sono le funzioni simmetriche elementari degli autovalori. Il coefficiente di λ^{n-1} è, a meno di segno, la traccia; il termine costante è, a meno di segno, il determinante. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ sono gli autovalori di A contati con la loro molteplicità algebrica (cioè le radici di p_A nel campo di spezzamento), allora per le formule di Viète:

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i$$

La traccia è dunque la somma degli autovalori. Poiché gli autovalori sono intrinseci alla trasformazione — non dipendono dalla base — questo fornisce un secondo argomento indipendente per l'invarianza di tr(A) sotto coniugazione.

Questa relazione tra traccia e autovalori ha conseguenze non immediate. Si consideri la traccia della potenza k-esima di A:

$\mathrm{tr}(A^k) = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i^k$

Le quantità $S_k = \Sigma_i \lambda_i^k$ sono le *somme di Newton*, e le relazioni di Newton esprimono i coefficienti del polinomio caratteristico in funzione di esse:

$S_1 - e_1 = 0$
$S_2 - e_1 S_1 + 2e_2 = 0$
$S_3 - e_1 S_2 + e_2 S_1 - 3e_3 = 0$
…
$S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1} S_1 + (-1)^k k e_k = 0$

dove e_k è la k-esima funzione simmetrica elementare degli autovalori. Questo significa che la conoscenza di tr(A), $\mathrm{tr}(A^2)$, …, $\mathrm{tr}(A^n)$ determina interamente il polinomio caratteristico di A, e quindi — sulla chiusura algebrica del campo di base — l'insieme degli autovalori. La traccia delle potenze di A è dunque un sistema generativo di tutta l'informazione spettrale della trasformazione.

I.3. La traccia in dimensione infinita: operatori trace-class

Il passaggio alla dimensione infinita è tutt'altro che automatico. Su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ di dimensione infinita separabile, un operatore lineare limitato $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ non possiede in generale una traccia ben definita: la serie $\Sigma_i \langle Te_i, e_i \rangle$, dove $\{e_i\}$ è una base ortonormale numerabile, può divergere o dipendere dalla scelta della base. La teoria degli *operatori trace-class* (o operatori di classe 1) isola precisamente la classe degli operatori per cui questa somma converge assolutamente e indipendentemente dalla base.

Sia $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore lineare limitato e compatto. Il suo *valore assoluto* è l'operatore $|T| = (T*T)^{(1/2)}$, *dove* T^* è l'aggiunto di T e la radice quadrata è definita per il calcolo funzionale. Gli *valori singolari* di T sono gli autovalori $s_k(T) \geq 0$ dell'operatore $|T|$. Si dice che T appartiene alla *classe trace* $\mathcal{S}_1(\mathbb{H})$ se e solo se

$\|T\|_1 = \Sigma_k s_k(T) < \infty$

In tal caso, la traccia

$\mathrm{tr}(T) = \Sigma_i \langle Te_i, e_i \rangle$

converge assolutamente e il suo valore è indipendente dalla scelta della base ortonormale $\{e_i\}$. La ciclicità vale ancora: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ purché il prodotto AB sia trace-class. Gli operatori trace-class formano un ideale bilatero bilaterale nell'algebra degli operatori limitati, e $\mathscr{S}_1(\mathbb{H})$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.

La norma trace è la più fine tra le norme di Schatten: le *classi di Schatten* $\mathscr{S}_p(\mathbb{H})$, per $1 \leq p < \infty$, sono definite dalla condizione $\Sigma\ s(T)^p < \infty$, e $\mathscr{S}_2(\mathbb{H})$ è lo spazio degli operatori di Hilbert-Schmidt, quello naturalmente dotato di una struttura di spazio di Hilbert con prodotto interno $\langle S, T \rangle_{HS} = \mathrm{tr}(S^*T)$. La classe $\mathscr{S}_1$ è contenuta in $\mathscr{S}_2$, che a sua volta è contenuta nello spazio degli operatori compatti.

I.4. La traccia in meccanica quantistica: l'operatore densità

È nel contesto della meccanica quantistica che il funzionale traccia rivela la sua natura più profonda come meccanismo di estrazione dell'informazione fisica da uno spazio astratto di stati. La formulazione assiomatica della meccanica quantistica — nella versione che risale a von Neumann e alla sua monumentale opera del 1932 — descrive lo stato di un sistema fisico mediante un *operatore densità* ρ agente su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ associato al sistema. L'operatore densità soddisfa tre condizioni:

(i) ρ è autoaggiunto: $\rho = \rho^*$
(ii) ρ è semidefinito positivo: $\langle \psi, \rho\psi \rangle \geq 0$ per ogni $\psi \in \mathbb{H}$
(iii) ρ è normalizzato: $\mathrm{tr}(\rho) = 1$

La condizione (iii) è la condizione di normalizzazione espressa tramite la traccia: essa garantisce che le probabilità associate alle misure sommino a uno. Il *valore di aspettazione* di un'osservabile — rappresentata da un operatore autoaggiunto O — nello stato ρ è:

$\langle O \rangle_\rho = \mathrm{tr}(\rho\, O)$

Questa formula è il risultato di un calcolo. Se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ è lo stato puro corrispondente al vettore normalizzato $|\psi\rangle$ e $\{|e_i\rangle\}$ è una base ortonormale di autovettori di O con autovalori o_i — $O|e_i\rangle = o_i|e_i\rangle$ — allora:

$$\mathrm{tr}(\rho\, O) = \Sigma_i \langle e_i|\, \rho\, O\, |e_i\rangle = \Sigma_i \langle e_i|\, \psi\rangle\langle\psi|\, O\, |e_i\rangle = \Sigma_i \langle e_i|\psi\rangle\, o_i\, \langle\psi|e_i\rangle$$
$$= \Sigma_i\, o_i\, |\langle\psi|e_i\rangle|^2 = \Sigma_i\, o_i\, P(o_i|\psi)$$

dove $P(o_i|\psi) = |\langle\psi|e_i\rangle|^2$ è la probabilità quantistica — secondo la regola di Born — di ottenere il risultato o_i nella misura di O sullo stato $|\psi\rangle$. La formula $\mathrm{tr}(\rho O)$ è dunque la media ponderata dei possibili risultati della misura, con pesi dati dalle probabilità

quantistiche. La traccia è qui il meccanismo attraverso cui lo spazio astratto degli stati — lo spazio di Hilbert — «restituisce» un numero reale fisicamente osservabile.

Per gli stati misti — stati che rappresentano la nostra ignoranza statistica riguardo allo stato puro effettivo del sistema — l'operatore densità ha la forma

$$\varrho = \Sigma \; p \; |\psi\rangle\langle\psi|$$

dove $\{p\}$ è una distribuzione di probabilità classica ($p \geq 0$, $\Sigma \; p = 1$) e $\{|\psi\rangle\}$ sono vettori normalizzati (non necessariamente ortogonali). La traccia garantisce ancora $tr(\varrho) = 1$ e il valore di aspettazione si calcola come $tr(\varrho O)$. La distinzione tra stati puri ($\varrho^2 = \varrho$, $tr(\varrho^2) = 1$) e stati misti ($tr(\varrho^2) < 1$) si legge direttamente dalla traccia del quadrato dell'operatore densità.

I.5. La traccia parziale e l'entanglement

Una delle applicazioni più significative del funzionale traccia in meccanica quantistica è la *traccia parziale*, lo strumento che permette di descrivere il comportamento di un sottosistema di un sistema quantistico composto. Sia $\mathbb{H} = \mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$ il prodotto tensore di due spazi di Hilbert, corrispondenti a due sottosistemi A e B. Se ϱ_AB è l'operatore densità del sistema composto, lo *stato ridotto* di A è definito dalla traccia parziale su B:

$$\varrho_A = tr_B(\varrho_AB)$$

Formalmente, se $\{|b\rangle\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{H}_B$, allora:

$$\varrho_A = \Sigma \; (I_A \otimes \langle b|) \; \varrho_AB \; (I_A \otimes |b\rangle)$$

Lo stato ridotto ϱ_A è ancora un operatore densità valido su $\mathbb{H}_A$ (autoaggiunto, semidefinito positivo, di traccia 1), e descrive tutte le previsioni statistiche che possono essere fatte su misure eseguite esclusivamente sul sottosistema A.

Il fenomeno dell'*entanglement* — l'intreccio quantistico — si manifesta precisamente qui. Se lo stato del sistema composto è puro ma non fattorizzabile — non è cioè della forma $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ — allora lo stato ridotto ϱ_A è uno stato misto, non puro. Il grado di entanglement tra A e B si misura attraverso l'*entropia di von Neumann* dello stato ridotto:

$$S(\varrho_A) = -tr(\varrho_A \log \varrho_A) = -\Sigma \; \lambda \; \log \lambda$$

dove λ sono gli autovalori di ϱ_A. Questa quantità è nulla se e solo se ϱ_A è uno stato puro, cioè se e solo se i due sottosistemi non sono entangled. È massima — e uguale a $\log(\dim \mathbb{H}_A)$ — quando ϱ_A è completamente misto, cioè proporzionale all'identità,

il che corrisponde al massimo entanglement. L'entropia di von Neumann è dunque un funzionale della traccia parziale; essa misura quanta informazione sul sottosistema A viene «tenuta in ostaggio» dalle correlazioni con B.

I.6. La traccia come atto di estrazione: una prima riflessione

Prima di procedere verso i domini extra-matematici, è utile fermarsi su ciò che la traccia fa, strutturalmente parlando. In tutti i contesti esaminati — l'algebra lineare in dimensione finita, gli operatori di Hilbert-Schmidt, la meccanica quantistica degli stati misti — la traccia compie un'operazione che si può descrivere come segue: essa estrae da un oggetto astratto e strutturalmente ricco — una matrice, un operatore, uno stato quantistico — un'informazione *scalare*, un numero, che è al contempo globale (dipende dall'intero oggetto, non da un elemento isolato) e invariante (non dipende dalla rappresentazione scelta).

La traccia non è la proiezione su una componente: non isola una parte dell'oggetto, ma ne distilla una proprietà complessiva. Non è il determinante, che cattura il comportamento moltiplicativo; è la somma degli autovalori, il comportamento additivo. Non è la norma operatoriale, che misura il valore singolare massimo; è la somma di tutti i valori singolari ponderati opportunamente. La traccia è una forma di *totalizzazione parziale*: raccoglie l'intera struttura spettrale dell'oggetto in un singolo numero, perdendo per via l'informazione sulla distribuzione degli autovalori ma preservando la loro somma.

Questa struttura di estrazione — un oggetto ricco di struttura interna che «lascia» una traccia scalare attraverso un'operazione di totalizzazione — è precisamente la struttura che si ritroverà, trasformata e declinata in contesti radicalmente diversi, nei capitoli successivi del presente saggio. La traccia fossile di un organismo, la traccia criminale di un contatto, la traccia della presenza nel segno scritto secondo Derrida: in tutti questi casi si tratta di un oggetto assente che ha depositato su un substrato un residuo scalare — una marca — che porta in sé un'informazione sulla struttura dell'assente, senza restituirlo nella sua pienezza. Il funzionale traccia della meccanica quantistica è la versione formalmente più precisa di questa struttura, ma la struttura è più ampia del suo formalismo.

I.7. Traccia e carattere di gruppo: la teoria delle rappresentazioni

Un ulteriore dominio in cui la traccia gioca un ruolo fondamentale — e che arricchisce il panorama semantico del concetto — è la teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti. Sia G un gruppo finito e sia $\varrho : G \to GL(V)$ una rappresentazione di G su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Il *carattere* della rappresentazione è la funzione $\chi_\varrho : G \to \mathbb{C}$ definita da:

$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$

Il carattere è costante sulle classi di coniugio di G — poiché tr è invariante per coniugazione — ed è dunque una *funzione di classe*. Il teorema fondamentale della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti afferma che le rappresentazioni irriducibili di G sono classificate, a isomorfismo, dai loro caratteri: due rappresentazioni sono isomorfe se e solo se hanno lo stesso carattere. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili formano una base ortonormale dello spazio delle funzioni di classe su G rispetto al prodotto interno

$\langle \chi, \psi \rangle = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi(g)\, \overline{\psi(g)}$

La tavola dei caratteri di un gruppo finito — la matrice quadrata che ha sulle righe i caratteri delle rappresentazioni irriducibili e sulle colonne le classi di coniugio — contiene l'intera informazione sulla struttura di rappresentazione del gruppo e determina in larga misura la struttura del gruppo stesso. La traccia è dunque il meccanismo attraverso cui la struttura astratta di un gruppo lascia la propria impronta in uno spazio vettoriale dove opera: il carattere è la traccia dell'azione.

Questa formulazione è già, strutturalmente, una teoria delle tracce nel senso più ampio: il gruppo agisce su uno spazio, e la traccia è il residuo di questa azione che rimane invariante sotto le simmetrie interne del gruppo. Un gruppo non lascia la propria identità nell'azione su un vettore singolo — che può essere trasformato in qualsiasi altro vettore della stessa orbita — ma la lascia nella traccia della trasformazione, nell'invariante globale che nessuna simmetria riesce a cancellare.

II. La Traccia in Derrida: Archi-Scrittura, Différance e l'Assenza Strutturante

II.1. Il punto di partenza: la critica del fonocentrismo

Comprendere la nozione derridiana di traccia richiede di risalire alla critica che ne è il presupposto: la critica del *logocentrismo* e, nella sua declinazione più specifica, del *fonocentrismo* — la privilegiazione della voce, della parola parlata, della presenza immediata del significato nella coscienza parlante. Questa critica attraversa i testi derridiani del 1967 — *De la grammatologie*, *La voix et le phénomène*, *L'écriture et la différence* — e costituisce il suolo da cui la nozione di traccia emerge come risposta alternativa alla domanda sull'origine del segno e del significato.

La tradizione filosofica occidentale, nella lettura di Derrida, ha costantemente valorizzato la voce rispetto alla scrittura: la voce è il luogo in cui il pensiero si esprime a sé stesso senza mediazione, dove il significato è presente nella coscienza nel momento stesso in cui si articola. Platone relega la scrittura al rango di copia della parola viva, rimedio imperfetto per la memoria difettosa; Rousseau nella sua filosofia del linguaggio oppone la spontaneità melodica della voce alla convenzione astratta della scrittura; Saussure, pur postulando l'arbitrarietà del segno, tratta la scrittura come rappresentazione secondaria e derivata del segno linguistico orale; Husserl, nella *Erste Untersuchung* delle *Logische Untersuchungen* e poi in *Ideen I*, analizza l'espressione come luogo in cui il significato si anima nella coscienza vivente, e la voce interna del monologo solitario come il caso più puro di questa animazione.

Derrida legge in questa privilegiazione della voce una metafisica della presenza: il presupposto che il significato sia qualcosa di presente, di dato in modo pieno e immediato alla coscienza nel momento dell'espressione orale. La scrittura, in questa metafisica, è sempre già un allontanamento, una spazializzazione, una morte del significato vivente. L'intero arco di *De la grammatologie* è una lunga dimostrazione che questa priorità è logicamente insostenibile, che la voce stessa funziona già secondo la logica che si attribuisce alla sola scrittura, e che ciò che si chiama scrittura non è la rappresentazione secondaria di un parlare originario ma la condizione di possibilità di ogni significazione, inclusa quella orale.

II.2. L'archi-traccia e la decostruzione dell'origine

Il concetto di *archi-traccia* — o semplicemente *traccia* nel suo senso fondamentale — è lo strumento con cui Derrida articola questa priorità della scrittura intesa nel senso più ampio. Per comprenderlo occorre prendere le mosse dall'analisi del segno saussuriano. In Saussure, il segno linguistico è una relazione tra significante (immagine acustica) e significato (concetto); questa relazione è arbitraria, ma all'interno del sistema linguistico i segni si definiscono negativamente, per differenza dagli altri segni: non c'è contenuto positivo nel significante /gatto/, esso vale unicamente perché non è /patto/, /ratto/, /motto/ e così via. Il valore è differenziale, non sostanziale.

Derrida accoglie questa svolta differenziale ma la radicalizza: se il valore del segno è interamente determinato dalle sue differenze con gli altri segni, allora nessun segno ha un contenuto proprio, una presenza piena in se stesso. Ogni segno rimanda ad altri segni, e questi ad altri ancora, in una catena teoricamente infinita di rimandi. Non c'è un punto terminale in cui il significato si stabilizzi nella presenza a se stesso. Ciò che Saussure chiama il sistema sincrono delle differenze non è mai presente come totalità: è sempre già in ritardo su se stesso, sempre già diviso.

La *traccia* è il nome che Derrida dà a questa struttura. Ogni segno porta in sé la traccia degli altri segni da cui si differenzia: questa traccia non è la presenza di quegli altri segni, ma la marca della loro assenza strutturante. Il segno /gatto/ non contiene /patto/ come un elemento positivo, ma /patto/ vi è presente come assenza, come ciò che non è e che proprio non essendo determina il valore di /gatto/. La traccia è

dunque la presenza dell'assente nella struttura del presente — non un'assenza bruta, ma un'assenza che lavora, che struttura, che è costitutiva.

L'archi-traccia designa la struttura più originaria di questo meccanismo. Derrida propone questo termine per evitare l'equivoco di pensare la traccia come il residuo di una presenza precedente — come l'impronta lasciata da un piede che è passato. L'archi-traccia non è la traccia di qualcosa che è stato presente e ora è assente: essa designa una struttura in cui non c'è mai stata una presenza originaria priva di traccia, in cui l'origine è già sempre la traccia di un'altra origine, in una regressione che non ha fondo. L'archi-traccia è il nome del fatto che non c'è un primo termine, una presenza pura da cui tutto si sarebbe poi allontanato: il differire è originario, la traccia è la struttura stessa dell'origine.

II.3. La différance: differire e differenziare

Strettamente connesso alla nozione di traccia è il neologismo *différance* — con una 'a' al posto della 'e' nella terminazione — che Derrida introduce nel testo del 1968 poi raccolto in *Marges de la philosophie*. Il neologismo è costruito sull'ambiguità del verbo francese *différer*, che significa simultaneamente due cose: *differenziarsi* (essere diverso da) e *differire* (rimandare nel tempo, posporre). L'aggiunta della 'a' — impercettibile nella pronuncia, visibile solo nella scrittura — segnala entrambi i sensi contemporaneamente, e segnala che nessuno dei due è riducibile all'altro.

La différance ha dunque una struttura doppia. Come *differenziazione*, essa designa il movimento attraverso cui i segni si costituiscono nei loro valori attraverso le loro differenze reciproche: è il meccanismo saussuriano portato alle sue conseguenze estreme. Come *differimento*, essa designa il movimento attraverso cui il significato non è mai presente in un istante puntuale ma è sempre rimandato, sempre «a venire», sempre preceduto da un'anticipazione e seguito da una ritenzionione: è la struttura temporale del significato nella sua impossibilità di presentarsi in modo pieno e attuale.

La différance non è un concetto nel senso tradizionale — non ha un contenuto determinato che la definisca positivamente — perché essa è la condizione di possibilità di ogni formazione di concetti. Essa non è neppure una parola come le altre, perché funziona come la condizione di possibilità del funzionamento delle parole. Derrida la chiama a volte quasi-concetto o quasi-parola per segnalare questo statuto anomalo: non è né un concetto né una parola, ma la struttura che rende possibili i concetti e le parole.

Il nesso con la traccia è stretto: la traccia è la forma spaziale della différance, mentre la différance è la temporalizzazione della traccia. Ogni segno porta la traccia degli altri segni (differenziazione spaziale) e rimanda continuamente a un significato che non si stabilizza mai in una presenza (differimento temporale). La traccia e la différance sono la stessa struttura vista da due angolazioni diverse: l'una sottolinea il residuo dell'assente nel presente, l'altra sottolinea il moto perpetuo del rinvio.

II.4. La scrittura come condizione della voce

La conseguenza che Derrida trae da questa analisi è paradossale solo in apparenza: la scrittura — intesa non come iscrizione grafica su un supporto materiale ma come struttura del differimento e della traccia — non è derivata dalla voce; è al contrario la condizione di possibilità della voce stessa. La voce funziona già secondo la logica della traccia: un fonema si costituisce nel suo valore fonologico attraverso le sue differenze con gli altri fonemi, porta in sé la traccia di ciò che non è, è già attraversato dalla spazializzazione e dall'iterazione.

Husserl, nella *Fenomenologia della coscienza interna del tempo*, analizza la struttura della percezione temporale come ritenzione del passato appena trascorso e protenzione dell'imminente futuro all'interno del presente vivente. Il presente non è un istante puntuale ma una struttura tripartita in cui il «giusto ora» è circondato da sfumature di ritenutezza e di anticipazione. Derrida legge in questa struttura la traccia husserliana della scrittura nella voce: il presente vivente è già intriso di ciò che non è più e di ciò che non è ancora, è già una traccia, già una forma di scrittura nel senso ampio. La voce non precede la scrittura: essa è già sempre già scrittura, struttura di tracce che si rimandano senza risolversi in una presenza piena.

II.5. La restanza e l'iterabilità

Due ulteriori concetti permettono di precisare la nozione derridiana di traccia: la *restanza* e l'*iterabilità*. La restanza — neologismo che traduce il francese *restance* — designa la permanenza differenziale della traccia scritta: un testo scritto sopravvive all'intenzione del suo autore, si presta a essere riletto in contesti che l'autore non aveva previsto né poteva prevedere, produce effetti di senso che eccedono ciò che era intenzionalmente significato. Il testo è una traccia che *resta* — che persiste nel tempo — e questa persistenza lo rende radicalmente aperto, strutturalmente esposto alla reinterpretazione.

L'iterabilità designa la possibilità di ripetizione strutturale insita in ogni segno: un segno deve poter essere ripetuto, citato, impiegato in contesti diversi da quello della sua produzione originaria, perché è questa possibilità di iterazione che ne costituisce l'identità come segno. Ma ogni iterazione introduce una differenza: il segno ripetuto non è identico a se stesso, porta con sé il contesto del suo precedente impiego e lo modifica. L'iterabilità è dunque una struttura di ripetizione impura, di ripetizione che è sempre anche alterazione.

Queste due strutture — restanza e iterabilità — sono le condizioni formali di possibilità della traccia come tale. Una traccia che non restasse, che si cancellasse nel momento stesso del suo prodursi, non sarebbe una traccia. Una traccia che non fosse iterabile, che valesse solo per l'evento singolare della sua produzione, non funzionerebbe come segno. La traccia è per struttura sopravvivente e ripetibile; è per struttura eccedente l'intenzione e il contesto originario.

II.6. Critica e limiti: il rischio del pan-testualismo

La nozione derridiana di traccia ha suscitato obiezioni filosofiche serie che meritano di essere registrate con fedeltà, senza né adottarle acriticamente né rigettarle in blocco. La più ricorrente è l'accusa di *pan-testualismo*: se tutto funziona secondo la logica della traccia e della scrittura, se non c'è nulla al di fuori del testo — secondo la formula spesso citata ma raramente letta nel contesto — allora la distinzione tra il testo e la realtà, tra il segno e il referente, rischia di scomparire in un idealismo linguistico. Il mondo si dissolverebbe in un gioco di rimandi tra testi, senza punto di ancoraggio al reale.

Derrida ha risposto a questa obiezione in numerosi testi, sottolineando che la formula «il n'y a pas de hors-texte» — che non c'è nulla al di fuori del testo — non nega l'esistenza della realtà extra-linguistica ma afferma che non vi è accesso a quella realtà che non passi attraverso strutture di segni, di tracce, di interpretazione. La realtà non scompare; scompare l'accesso immediato, non mediato da segni, a essa. Questa posizione è meno scandalosa di quanto la formula suggerisca, e nella sua versione sobria si avvicina molto a posizioni condivise da filosofi analitici come Quine o Davidson sulla impossibilità di uscire dalla «rete delle credenze» nel confronto diretto con l'esperienza pura.

Una seconda obiezione riguarda la *determinatezza* della traccia: se ogni segno rimanda a ogni altro in una catena infinita di differimenti, come è possibile che i testi abbiano significati relativamente stabili, che la comunicazione funzioni, che gli enunciati abbiano condizioni di verità? La risposta derridiana — che la stabilità è un effetto di sedimentazione storicamente variabile, non un dato di natura — è certamente plausibile ma non risolve del tutto la tensione tra l'apertura strutturale della traccia e la chiusura pratica della comunicazione. Questa tensione non è un difetto della teoria: è il problema genuino che essa pone.

II.7. La struttura della traccia derridiana: un'analisi comparativa

Alla luce del capitolo precedente, è possibile articolare la struttura della traccia derridiana in termini che ne permettono il confronto con il funzionale traccia matematico — senza forzare un'analogia che sarebbe ingenua, ma identificando una struttura comune che giustifica l'impiego dello stesso termine.

Il funzionale traccia matematico, si è visto, estrae da un oggetto strutturalmente ricco — una matrice, un operatore — un'informazione scalare che è al contempo globale e invariante: essa dipende dall'intero oggetto ma non dalla rappresentazione scelta. La traccia matematica è la forma di un *residuo invariante*: ciò che dell'oggetto permane indipendentemente dalla base di osservazione.

La traccia derridiana ha una struttura analoga in senso traslato: ogni segno porta il residuo invariante delle sue relazioni con gli altri segni — le tracce dell'assente — in

modo che non dipende dal contesto singolo di impiego ma si conserva attraverso le iterazioni. La differenza è che il residuo matematico è uno scalare ben definito — un numero — mentre il residuo derridiano è strutturalmente aperto, in principio non chiudibile in una determinazione stabile. Il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho O) = \langle O \rangle_\varrho$ estrae dal sistema fisico un numero reale; la traccia nel segno non estrae un valore determinato ma apre una catena di rimandi potenzialmente infinita.

Questa differenza non è irrilevante: essa marca il punto in cui la metafora si esaurisce e la distinzione tra i due registri si impone. Ciò che rimane comune è la struttura dell'estrazione: qualcosa che era interno a un oggetto ricco viene depositato in un residuo che sopravvive alle trasformazioni, che è invariante rispetto a una certa classe di operazioni (le trasformazioni di similitudine per la traccia matematica; le variazioni di contesto per la traccia derridiana), e che porta un'informazione sull'oggetto senza riprodurlo nella sua interezza.

C'è infine un terzo elemento comune, forse il più profondo: in entrambi i casi la traccia porta informazione su qualcosa che *non è presente*. Per il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho)$, il sistema fisico non è presente nel numero che la traccia restituisce — è scomparso nella media; per la traccia derridiana, il significato pieno e originario non è mai stato presente, e la traccia è esattamente la struttura di questa assenza costitutiva. La traccia non è la presenza dell'oggetto in un supporto: è la forma della sua assenza strutturante.

II.8. La traccia e il problema dell'origine

La conseguenza più radicale della nozione derridiana di traccia riguarda il problema dell'origine. La metafisica della presenza presuppone che ci sia un punto di origine — una presenza piena, un significato originario, un parlato vivente — da cui la traccia si allontana come derivazione seconda. La traccia sarebbe il segno di un'assenza, ma questa assenza sarebbe essa stessa la presenza di qualcosa che è stato e non è più: l'impronta del piede suppone il piede che vi ha lasciato la sua forma.

L'archi-traccia, come si è accennato, scardina questa logica: se la traccia è la struttura originaria — se non c'è mai stata una presenza piena che non fosse già attraversata dalla différance — allora il concetto di origine si trasforma radicalmente. L'origine non è un inizio temporale che si potrebbe in principio raggiungere risalendo la catena delle tracce; è piuttosto una struttura di rimando che non ha un termine fisso. La regressione genealogica delle tracce non approda a un primo termine assolutamente presente: approda a un'altra traccia, e poi a un'altra ancora.

Questa struttura ha una risonanza precisa con il problema matematico dell'origine in altri contesti. La catena delle tracce derridiana ha la stessa forma della catena di rimandi nei sistemi formali gödeliani: ogni proposizione rimanda a un sistema di assiomi che la fonda, ma quel sistema non può fondare se stesso, e qualsiasi fondamento presuppone a sua volta un fondamento che lo precede. Non si tratta di un'analogia forzata: in entrambi i casi si è di fronte a una struttura in cui il rimando è infinito e il fondamento assoluto è strutturalmente impossibile. La différance

derridiana e il secondo teorema di incompletezza di Gödel sono espressioni, in registri molto diversi, della stessa impossibilità di fondare un sistema dall'interno mediante le sue sole risorse.

Il capitolo seguente abbandona il territorio del linguaggio e della logica per portare questa struttura nel dominio del tempo geologico: la traccia fossile — l'ichnofossile — come modo di conservazione dell'assente che la Terra pratica da miliardi di anni prima che vi fosse una filosofia della traccia.

III. L'Ichnofossile: la Terra come Archivio di Comportamenti Assenti

III.1. Una distinzione fondamentale: corpo e comportamento

La paleontologia convenzionale — quella che popola l'immaginario collettivo con scheletri ricostruiti e calchi di cranî — si occupa primariamente dei *body fossils*, i fossili del corpo: denti, ossa, gusci, esoscheletri, impronte di tessuti molli occasionalmente preservate in condizioni straordinarie. Questi resti sono la traccia materiale dell'organismo nella sua struttura anatomica: conservano l'informazione sulla morfologia, sulla biomeccanica, in certi casi sulla fisiologia e sulla filogenia. Ma vi è un'intera branca della paleontologia — la *paleoicnologia* — che si occupa di una categoria radicalmente diversa di resti fossili: le tracce del *comportamento*, non del corpo.

Gli *ichnofossili* — o *trace fossils*, o *icniti* — sono le strutture prodotte dall'attività di organismi e preservate nel substrato geologico: gallerie di scavo, tane, piste di camminamento, impronte di zampe e di corpi, segni di predazione, strutture di alimentazione, bioerrosioni su superfici dure, fori prodotti da organismi perforanti. Essi conservano informazione non sulla struttura anatomica del produttore ma sul suo comportamento: come si muoveva, come si nutriva, come si rifugiava, come interagiva con il substrato e con altri organismi. In molti casi — e questo è il punto epistemologicamente più significativo — l'organismo produttore della traccia è del tutto sconosciuto, non è mai stato trovato come fossile del corpo, e il suo comportamento è l'unica forma in cui la sua esistenza si è impressa nel registro geologico.

La distinzione terminologica è formalizzata dalla nomenclatura icnologica: agli ichnofossili si assegnano *icnotaxa* — nomi binomi secondo la convenzione linneana — che designano non l'organismo produttore (*tracemaker*) ma la struttura comportamentale preservata. Lo stesso ichnogenere può essere prodotto da organismi filogeneticamente lontanissimi che adottano comportamenti analoghi; viceversa, lo stesso organismo può produrre icnotaxa diversi a seconda della fase ontogenetica, del

tipo di substrato, o delle condizioni ambientali in cui opera. Il rapporto tra traccia e produttore è dunque molti-a-molti, non biunivoco, e questo pluralismo è una caratteristica strutturale del record icnologico, non un'imperfezione da superare.

III.2. La preservazione selettiva e il problema della rappresentatività

Prima di analizzare la struttura epistemologica dell'ichnofossile, occorre confrontarsi con il problema della preservazione. Non tutti i comportamenti lasciano tracce durevoli, e non tutte le tracce si fossilizzano: la catena tra il comportamento originario e la struttura oggi studiabile in affioramento o in campione è lunga e selettiva, e ogni anello della catena introduce un filtro che modifica la rappresentatività del campione finale rispetto alla diversità comportamentale originaria.

Il primo filtro è il *substrato*. Solo certi tipi di substrato sono idonei alla preservazione delle tracce: sedimenti a granulometria fine — fanghi, sabbie fini, limi — sono i più favorevoli, perché registrano l'impronta con fedeltà e la conservano prima che venga perturbata. Substrati grossolani o incoerenti non registrano le strutture comportamentali con sufficiente risoluzione. I substrati duri — superfici carbonatiche, superfici di erosione — preservano invece egregiamente le strutture di perforazione e bioerzione, ma non le impronte superficiali.

Il secondo filtro è la *diagenesi*: i processi di litificazione e trasformazione del sedimento in roccia possono obliterare, deformare o esaltare le strutture icnologiche. Una galleria di scavo riempita da sedimento di composizione diversa dal sedimento circostante può essere preservata come struttura diagenetica anche quando la traccia biologica originaria era quasi invisibile; viceversa, strutture chiaramente definite al momento della loro produzione possono essere cancellate da bioturbazione successiva — cioè da attività di altri organismi che rimescolano il sedimento — prima che si litifichi.

Il terzo filtro è il *tempo di residenza in superficie*: una traccia prodotta su un fondale marino o su una piana di marea rimane esposta a distruzione da parte di correnti, bioturbazione, e attività degli organismi stessi per un intervallo di tempo variabile prima di essere coperta da un nuovo strato di sedimento che la sigilla. Solo le tracce coperte rapidamente — spesso in seguito a eventi di sedimentazione episodica, come tempeste o correnti di torbidità — hanno alta probabilità di preservazione.

Questi filtri successivi non sono casuali: essi selezionano sistematicamente certi tipi di comportamento, certi tipi di substrato, certi ambienti deposizionali. Il record icnologico non è un campione casuale del comportamento passato; è un campione strutturalmente distorto verso gli ambienti marini di piattaforma, verso i comportamenti di scavo e di infaunazione, verso le strutture di dimensioni sufficientemente grandi da sopravvivere alla diagenesi. Questa distorsione non invalida le inferenze paleontologiche: le rende più complesse e richiede che l'interpretazione delle tracce sia sempre accompagnata da un'analisi del contesto tafonomico — le

condizioni di deposizione, di seppellimento e di preservazione — in cui esse si trovano.

III.3. La nomenclatura icnologica: tassonomia di comportamenti

Il sistema di nomenclatura degli ichnofossili merita una disamina particolare, perché esso codifica in modo esplicito la scelta di classificare *comportamenti* piuttosto che *organismi*. Il Codice Internazionale di Nomenclatura Zoologica si applica agli icnotaxa con alcune modifiche specifiche: il nome dell'ichnogenere indica la struttura comportamentale, non il produttore; il nome dell'ichnospecies specifica ulteriori dettagli morfologici o strutturali della traccia.

Un esempio chiarirà la logica del sistema. *Ophiomorpha nodosa* è l'ichnospecies che designa gallerie di scavo con pareti irregolari rivestite da palline di sedimento compattato, che caratterizzano l'attività di crostacei del tipo dei gamberi di sabbia (*Callianassa* e affini) in substrati sabbiosi di spiaggia sommersa e di battigia. L'ichnogenere *Ophiomorpha* è stato trovato in rocce di età compresa tra il Giurassico inferiore e il Quaternario; le morfologie che lo caratterizzano riflettono un tipo di comportamento di scavo e di consolidamento del sedimento che diversi generi di crostacei decapodi hanno adottato indipendentemente nel corso delle loro storie evolutive. La stabilità del comportamento di scavo attraverso centinaia di milioni di anni e attraverso lignaggi filogenetici diversi rivela non l'identità del produttore ma la convergenza nella soluzione di un problema ecologico — come costruire e mantenere una tana stabile in un substrato sabbioso soggetto a rimescolamento da corrente.

La classificazione in *icnofacies* — sistemi di associazione ricorrente di icnotaxa che caratterizzano certi ambienti deposizionali — è uno degli strumenti più potenti della paleoicnologia. Adolf Seilacher, nel lavoro fondamentale del 1967 poi elaborato lungo decenni di ricerca, identificò un sistema di icnofacies ricorrenti nelle successioni sedimentarie marine, denominate con il nome dell'ichnogenere più rappresentativo: la Scolithes ichnofacies degli ambienti di alta energia con substrati sabbiosi incoerenti; la Cruziana ichnofacies dei fondali marini di bassa energia a granulometria fine; la Zoophycos ichnofacies degli ambienti profondi a bassa ossigenazione; la Nereites ichnofacies delle pianure abissali. Ciascuna icnofacies è definita da un'associazione di comportamenti — di pascolo, di scavo, di costruzione — che riflette le condizioni ecologiche dell'ambiente, non la composizione tassonomica della comunità biologica. Le icnofacies sono ricorrenti attraverso il tempo geologico perché i problemi ecologici che definiscono certi ambienti sono ricorrenti, e le soluzioni comportamentali che essi esigono convergono indipendentemente dall'identità filogenetica dei produttori.

III.4. Il problema del tracemaker: inferenza da una traccia a un comportamento

Il problema centrale dell'interpretazione icnologica è quello dell'inferenza: a partire da una struttura preservata nel sedimento, come si risale al comportamento che la ha prodotta, e da questo comportamento all'organismo che lo ha messo in atto? Questa catena inferenziale procede in due direzioni opposte rispetto alla norma della paleontologia convenzionale. Il paleontologo del corpo risale dalla struttura anatomica alla fisiologia e al comportamento; l'icnologo risale dal comportamento preservato all'anatomia e all'ecologia dell'organismo produttore.

Il metodo dell'*icnologia neontologica* — lo studio delle tracce prodotte da organismi viventi in condizioni controllate o in ambienti naturali — è lo strumento principale per calibrare questa inferenza. Si tratta di un approccio attualista: si assume che i principi fisici e biomeccanici che regolano la produzione di tracce oggi abbiano operato anche nel passato. Un'analisi dettagliata della geometria di una galleria fossile — il diametro, la ramificazione, l'angolo di intersezione con la superficie, la texture delle pareti — permette di inferire le dimensioni del produttore, il tipo di appendici impiegate nello scavo, la presenza o assenza di rivestimento delle pareti. Queste inferenze non identificano univocamente il produttore, ma circoscrivono lo spazio delle possibilità biologiche in modo via via più stringente.

Un caso paradigmatico è quello dei *Ediacaran trace fossils* — le tracce prodotte da organismi del tardo Precambriano, tra 580 e 540 milioni di anni fa — che hanno cambiato profondamente la comprensione dell'origine della fauna complessa. Per decenni si era ritenuto che la vita animale complessa fosse emersa improvvisamente nella cosiddetta esplosione cambriana, circa 540 milioni di anni fa. Il ritrovamento di tracce icnologiche inequivocabili in rocce ediacarane — piste sinuose che attestano la presenza di organismi capaci di locomozione bilateralmente simmetrica, con muscolatura e capacità di risposta a gradienti chimici — ha anticipato di decine di milioni di anni la comparsa della fauna complessa, anche in assenza di qualsiasi fossile del corpo associato. Il comportamento ha lasciato traccia quando il corpo non si è conservato; la traccia è l'unica prova disponibile dell'esistenza di organismi le cui strutture anatomiche erano troppo molli e troppo poco mineralizzate per fossilizzarsi nelle condizioni ordinarie.

III.5. Struttura epistemologica dell'ichnofossile: assenza come evidenza

La struttura epistemologica dell'ichnofossile è radicalmente diversa da quella del fossile del corpo, e questa differenza merita di essere articolata con precisione perché essa illumina qualcosa di fondamentale sulla logica della traccia in generale.

Il fossile del corpo è — almeno in linea di principio — una parte dell'organismo che si è conservata. Tra il fossile e l'organismo che lo ha prodotto c'è una relazione di continuità materiale: le molecole del carbonato di calcio che compongono lo scheletro fossile erano le medesime molecole presenti nello scheletro vivente, anche se nel corso della diagenesi sono state gradualmente sostituite da minerali diversi. La struttura

anatomica del fossile del corpo mima, con distorsioni note e in parte correggibili, la struttura anatomica dell'organismo vivente.

L'ichnofossile non conserva nulla dell'organismo: conserva la *modifica che l'organismo ha impresso nel substrato*. Tra l'ichnofossile e l'organismo produttore non c'è continuità materiale: nessuna molecola del fossile era parte dell'organismo. L'ichnofossile è la forma negativa dell'organismo nel substrato, il calco inverso della sua azione: la galleria è lo spazio che l'organismo ha rimosso, non un pezzo dell'organismo stesso. La pista è la sequenza delle depressioni che le zampe hanno impresso nella superficie, non un tessuto dell'organismo cristallizzato nella roccia.

Questa struttura di assenza è costitutiva, non accidentale. L'ichnofossile non è un fossile del corpo mal conservato, un fossile di cui si è persa la parte organica: è un tipo fondamentalmente diverso di evidenza, che documenta il comportamento attraverso la sua assenza — attraverso ciò che dell'organismo non è presente nel record, ma che la sua azione ha lasciato come impronta nel mondo. Il produttore è assente in senso assoluto; ciò che resta è la struttura di questa assenza, la forma geometrica e testurale di ciò che è stato fatto.

Questa struttura epistemologica ha un'implicazione metodologica: l'interpretazione di un ichnofossile è sempre un'inferenza a ritroso da un effetto a una causa, da una struttura a un processo, da una forma a un comportamento. È l'inferenza della *detectio* — il rilevamento dell'assente a partire dal presente — nella sua forma più pura e più letterale. Non si tratta di un'inferenza probabilistica in senso bayesiano, perché i valori di prior sui comportamenti degli organismi del passato profondo sono difficilmente quantificabili; si tratta piuttosto di un'inferenza di tipo abduttivo, nel senso di Peirce: si cerca l'ipotesi che meglio spiega la struttura osservata, che la rende più comprensibile e più connessa con quanto già noto sui meccanismi biologici e fisici.

III.6. Il comportamento come informazione indipendente dall'anatomia

Uno degli aspetti più fecondi della paleoicnologia è la sua capacità di documentare il comportamento in modo relativamente indipendente dall'anatomia. Negli organismi viventi, anatomia e comportamento sono intimamente connessi: la struttura delle zampe di un'aquila dice molto sul tipo di predazione che pratica; la morfologia dei denti di un mammifero rivela la dieta. Nella paleontologia del corpo, si risale dal corpo al comportamento per via anatomica. Ma il record icnologico bypassa questa mediazione: documenta il comportamento direttamente, senza passare per l'anatomia.

Questo ha conseguenze importanti per lo studio dell'evoluzione del comportamento. L'evoluzione morfologica è documentata dal record dei body fossils; l'evoluzione comportamentale è documentata — spesso in modo più diretto e meno distorto — dal record icnologico. La comparsa di nuovi icnotaxa nel record geologico segnala l'acquisizione di nuovi comportamenti, indipendentemente da qualsiasi cambiamento morfologico. La *rivoluzione comportamentale cambriana* — l'esplosione di diversità

icnologica che caratterizza il confine Precambriano-Cambriano — è documentata dal record icnologico in modo più robusto di quanto non sia documentata dal record dei body fossils, perché la scheletrizzazione era ancora in corso e molti organismi non lasciavano resti corporei durevoli.

Adolf Seilacher ha sostenuto che le tracce icnologiche rivelano, negli organismi del Precambriano terminale, una transizione da comportamenti principalmente sessili — organismi che si nutrono di ciò che il mare porta loro — a comportamenti attivamente esploratori: la pista sinuosa, il pascolo sistematico della superficie del sedimento, la galleria che segue un gradiente di concentrazione di nutrienti. Questa transizione comportamentale — registrata nelle tracce prima che nel corpo — è forse il cambiamento più profondo nella storia della vita animale: il passaggio da una modalità passiva di sfruttamento dell'ambiente a una modalità attiva, esplorativa, orientata. Il comportamento ha cambiato la Terra prima che i corpi che lo mettevano in atto lasciassero tracce mineralizzate di se stessi.

III.7. La traccia fossile e la traccia filosofica: una struttura condivisa

Il confronto con le nozioni di traccia elaborate nei capitoli precedenti può ora essere condotto su basi più solide. La struttura dell'ichnofossile presenta analogie significative con la struttura della traccia derridiana, e differenze altrettanto istruttive.

L'analogia più immediata è quella dell'assenza strutturante: in entrambi i casi, ciò che la traccia documenta non è presente nel supporto. L'organismo produttore è assente dall'ichnofossile tanto quanto il significato originario è assente dal segno nella teoria derridiana. In entrambi i casi, la traccia non è la presenza ridotta di qualcosa che era pienamente presente: è la forma di un'assenza che è stata sempre tale. La galleria non è l'organismo impoverito; il segno non è il significato opacizzato.

La differenza essenziale riguarda il rapporto tra traccia e intenzione. La traccia derridiana è prodotta da un soggetto che intende significare qualcosa, e la *restanza* — la sopravvivenza della traccia oltre l'intenzione — è il punto in cui la traccia eccede il suo produttore. L'ichnofossile è prodotto da un organismo che non intende nulla nel senso della significazione: l'intenzione è qui sostituita dal comportamento biologicamente determinato, dalla spinta a nutrirsi, a rifugiarsi, a muoversi. La traccia fossile è il residuo di un comportamento, non di un'intenzione; essa eccede il suo produttore non perché sopravviva a una volontà che la precede, ma perché il substrato nel quale il comportamento si è impresso ha una durata incomparabilmente superiore a quella dell'organismo.

Con il funzionale traccia matematico, l'analogia ha una forma diversa. Entrambi operano attraverso un processo di riduzione da un oggetto strutturalmente ricco a un residuo che porta informazione selettiva su quell'oggetto. Il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho O)$ riduce la ricchezza dello stato quantistico ϱ e dell'osservabile O a un singolo numero reale, che contiene l'informazione pertinente per la previsione di una classe di misurazioni.

L'ichnofossile riduce la ricchezza del comportamento dell'organismo — la totalità della sua interazione con il substrato — a una struttura geometrica che conserva l'informazione pertinente per inferire certe sue proprietà comportamentali e morfologiche. In entrambi i casi la riduzione è *selettiva e strutturata*: non si conserva tutto dell'oggetto originale, ma si conserva ciò che il substrato o il formalismo è in grado di registrare.

La paleoicnologia e la meccanica quantistica condividono dunque, in modo sorprendente, un problema di fondo: entrambe inferiscono proprietà di entità non direttamente osservabili — il comportamento di un organismo estinto, lo stato di un sistema fisico prima della misura — a partire da un residuo strutturato che quelle entità hanno lasciato su un supporto accessibile all'osservazione. La differenza è che la meccanica quantistica dispone di un formalismo matematico che quantifica le previsioni e ne specifica la struttura probabilistica, mentre la paleoicnologia dispone di metodi qualitativi e semi-quantitativi che la ricerca contemporanea sta progressivamente affinando. Ma la struttura logica dell'inferenza è, in entrambi i casi, quella della *lectio di una traccia*: il passaggio dall'effetto alla causa attraverso un processo di interpretazione guidato da una teoria del meccanismo produttivo.

IV. Il Principio di Locard: Criminalistica, Contatto e l'Epistemologia dello Scambio

IV.1. La formulazione originale e la sua fortuna

Edmond Locard — medico legale e criminologo lionese, fondatore nel 1910 del primo laboratorio di polizia scientifica al mondo — è celebre quasi esclusivamente per il principio che porta il suo nome: ogni contatto lascia una traccia. La formulazione è così lapidaria da sembrare un assioma, una verità che si impone da sé per mera plausibilità intuitiva. Eppure il principio, esaminato con attenzione filosofica, è molto più ricco e molto più fragile di quanto l'aforisma suggerisca, e la sua analisi rivela una teoria epistemologica implicita che merita di essere esplicitata.

Occorre anzitutto precisare che Locard non ha mai formulato il principio nella forma assolutizzante con cui viene comunemente citato. La formulazione spesso attribuita a lui — «every contact leaves a trace» — è una sintesi retrospettiva operata dalla letteratura secondaria. Nelle sue opere — in particolare nei sette volumi del *Traité de criminalistique* pubblicati tra il 1931 e il 1940 — Locard tratta il principio in modo più sfumato e contestuale. Egli distingue tra classi di tracce di diversa stabilità e rilevabilità, e non sostiene l'universalità assoluta della traccia ma la sua sistematica attesa: ogni contatto tende a lasciare tracce, e le tecniche forensi mirano a rendere visibili e interpretabili tracce che senza di esse rimarrebbero invisibili o incomprensibili. Il principio è un'asserzione epistemologica sulla ricchezza informativa del mondo fisico, non un'asserzione metafisica sulla necessità logica delle tracce.

La versione che merita di essere discussa filosficamente è dunque non l'aforisma ma la struttura sottostante: ogni evento di contatto fisico tra due sistemi materiali produce modificazioni reciproche nei due sistemi, modificazioni che in linea di principio conservano informazione sull'evento di contatto e che possono essere, in condizioni favorevoli, rilevate e interpretate da un terzo osservatore dotato degli strumenti adeguati.

IV.2. La bidirezionalità: una struttura simmetrica

La caratteristica più spesso trascurata del principio di Locard — almeno nella sua versione popolarizzata — è la sua bidirezionalità. Il contatto non produce una traccia unilaterale: il sistema A lascia una traccia su B, e B lascia simultaneamente una traccia su A. Chi entra in una stanza porta con sé, dopo averla lasciata, le tracce dell'ambiente che vi ha trovato; e lascia nell'ambiente, dopo essere uscito, le tracce della propria presenza. Non si tratta di due applicazioni distinte del principio, ma di un'unica struttura di scambio: il contatto è un evento simmetrico che modifica entrambi i sistemi in contatto.

Questa simmetria ha conseguenze investigative dirette. In una scena del crimine, il criminale lascia tracce di sé — fibre dei propri indumenti, cellule epidermiche, capelli, impronte plantari, tracce di polvere proveniente dall'ambiente in cui ha trascorso il tempo precedente il crimine — ma porta via anche tracce dell'ambiente — fibre della vittima, polvere proveniente dal luogo dell'evento, eventualmente sangue o altro materiale biologico. L'analisi di entrambe le direzioni dello scambio duplica la disponibilità di evidenze e moltiplica le possibilità di connessione tra il sospettato, la vittima e la scena. Le tracce portate via dal criminale sono spesso più discriminanti di quelle lasciate, perché il criminale tende a cercare di eliminare le tracce lasciate — con guanti, maschere, coprisuola — ma raramente è consapevole di quelle che raccoglie inavvertitamente.

La bidirezionalità del principio ha anche una dimensione epistemologica più sottile: il contatto non è un evento a senso unico in cui un agente modifica un paziente, ma un'interazione in senso fisico preciso. In meccanica classica, il terzo principio di Newton — per ogni azione c'è una reazione uguale e contraria — è la formalizzazione della stessa struttura: le forze di contatto sono sempre coppia di forze, e la modifica dello stato del sistema A dovuta al contatto con B è inseparabile dalla modifica dello stato di B dovuta al contatto con A. Il principio di Locard è, in questa prospettiva, l'applicazione qualitativa a scala macroscopica di una simmetria che la fisica esprime in forma quantitativa e precisa.

IV.3. La degradazione della traccia: termodinamica e informazione

Il principio di Locard, nella sua versione epistemologicamente autentica, non sostiene che le tracce durino indefinitamente o che siano sempre recuperabili: sostiene che il

contatto le produce. La durata, la stabilità e la rilevabilità delle tracce sono questioni distinte e dipendono dalle proprietà fisiche e chimiche dei sistemi in contatto e delle condizioni ambientali.

La degradazione delle tracce è un processo termodinamico: le strutture ordinate prodotte dal contatto — la disposizione di fibre su una superficie, la geometria di un'impronta digitale, la distribuzione di residui biologici — hanno un'entropia inferiore a quella dello stato disordinato che le circonda, e il secondo principio della termodinamica garantisce che, in assenza di agenti conservativi, l'entropia del sistema tenda ad aumentare. Le tracce si degradano, si contaminano, vengono sovrascritte da eventi successivi, si mescolano con il rumore di fondo dell'ambiente.

La criminalistica è, in questa prospettiva, una lotta contro il secondo principio: una tecnica di recupero di informazione a bassa entropia in un ambiente che tende verso la massima entropia. Ogni tecnica di analisi forense mira a estrarre segnale da un substrato in cui il segnale si va degradando. Il DNA strategy — l'estrazione e amplificazione di materiale genetico da tracce biologiche — è il caso più spettacolare di questa capacità: a partire da quantità infinitesimali di materiale biologico degradato, la reazione a catena della polimerasi (PCR) amplifica le sequenze di interesse fino a quantità analizzabili, operando una sorta di amplificazione del segnale nel senso della teoria dell'informazione.

Nel linguaggio di Shannon, il principio di Locard può essere riformulato come segue: ogni evento di contatto produce un canale di trasmissione dell'informazione tra i due sistemi in contatto, un canale che ha una capacità C dipendente dalle proprietà fisiche del substrato e dalle condizioni ambientali, e attraverso il quale l'evento di contatto trasmette un certo numero di bit di informazione sullo stato dei sistemi al momento del contatto. La degradazione della traccia corrisponde all'introduzione di rumore nel canale: man mano che il tempo passa e le condizioni ambientali agiscono, il rapporto segnale/rumore si deteriora. La criminalistica mira a recuperare i bit trasmessi nonostante il rumore, attraverso tecniche di correzione degli errori — procedure di amplificazione, purificazione, confronto con database di riferimento — che massimizzano la quantità di informazione recuperabile.

IV.4. La classificazione delle tracce forensi: una tassonomia epistemica

La letteratura criminalistica ha sviluppato nel corso del Novecento un sistema di classificazione delle tracce forensi che è, nella sua sostanza, una tassonomia epistemica: una classificazione in base al tipo di inferenza che la traccia permette, non soltanto in base alla sua natura fisica. Le principali categorie sono le seguenti.

Le *tracce di provenienza* documentano l'origine di un oggetto o di una sostanza: l'analisi isotopica di un campione di piombo può rivelare la miniera da cui il minerale è stato estratto; l'analisi del polline contenuto nel miele può localizzare geograficamente l'area di raccolta con precisione di pochi chilometri; la composizione chimica del vetro di un

proiettile può essere confrontata con il vetro del vetro rotto nella scena del crimine. La traccia di provenienza connette un oggetto al suo luogo o processo di origine.

Le *tracce di contatto* documentano l'avvenimento di un contatto fisico tra due sistemi: fibre tessili trasferite da un indumento a un altro, cellule epidermiche e capelli lasciati su superfici toccate, impronte digitali, calchi di utensili su superfici deformabili. La traccia di contatto connette due sistemi attraverso un evento di interazione fisica.

Le *tracce di attività* documentano lo svolgimento di un processo: le tracce di polvere da sparo sulle mani di chi ha esploso un colpo d'arma da fuoco, i residui di esplosivo su superfici vicine al punto di detonazione, le striature su un proiettile che permettono di identificare la canna dell'arma che lo ha sparato. La traccia di attività connette un effetto fisico con il processo che lo ha prodotto.

Le *tracce comparative* — la categoria forse più rilevante dal punto di vista epistemologico — permettono il *confronto identificativo*: l'impronta plantare trovata sulla scena del crimine viene confrontata con l'impronta del calzaturea sequestrata al sospettato; il profilo del DNA di una cellula biologica trovata sulla vittima viene confrontato con il profilo del DNA del sospettato. Queste tracce permettono di formulare enunciati di identità probabilistica: con una certa probabilità — spesso estrema, di uno su diversi miliardi — la traccia proviene da questo individuo e non da altri.

IV.5. Il problema dell'interpretazione: dalla traccia all'enunciato giuridico

Il passaggio dalla traccia materiale all'enunciato giuridico rilevante — «il sospettato era presente sulla scena del crimine», «il sospettato ha toccato la vittima», «il sospettato ha sparato l'arma» — richiede una catena inferenziale di almeno tre passi, ciascuno dei quali introduce incertezza.

Il primo passo è l'*analisi della traccia*: la determinazione delle proprietà fisiche, chimiche e biologiche del reperto. Questo passo è quello più prossimo alle scienze naturali e il più suscettibile di standardizzazione e quantificazione. I metodi di analisi forense sono soggetti a validazione secondo criteri scientifici standard — riproducibilità, tasso di errore, sottoposizione a revisione tra pari — e i loro risultati hanno un grado di affidabilità misurabile.

Il secondo passo è il *confronto*: la comparazione della traccia analizzata con campioni di riferimento — il profilo del DNA del sospettato, le impronte del calzaturea sequestrato, il campione di vetro proveniente dalla finestra rotta. Il confronto produce una statistica di somiglianza — un'identità o una misura di distanza nel parametro spazio delle caratteristiche confrontate — e una stima della probabilità che la somiglianza osservata si produca per caso, in assenza di connessione causale tra la traccia e il campione di riferimento.

Il terzo passo è l'*interpretazione contestuale*: l'incorporazione della statistica di confronto in un ragionamento bayesiano che tiene conto delle ipotesi alternative, delle probabilità

a priori, e del contesto investigativo più ampio. Il teorema di Bayes fornisce la struttura formale per questo passaggio:

$$P(H \mid E) = P(E \mid H) \cdot P(H) / P(E)$$

dove H è l'ipotesi di interesse — ad esempio «la traccia proviene dal sospettato» — ed E è l'evidenza forense — la corrispondenza del profilo del DNA. $P(E \mid H)$ è la probabilità di osservare l'evidenza data l'ipotesi, $P(H)$ è la probabilità a priori dell'ipotesi, e $P(H \mid E)$ è la probabilità a posteriori che si vuole calcolare. Il *likelihood ratio* — il rapporto $P(E \mid H) / P(E \mid \neg H)$ — è il contributo specifico dell'evidenza forense all'aggiornamento della probabilità, indipendente dalla probabilità a priori.

Le difficoltà sorgono al livello del terzo passo, e sono di due ordini. Il primo è la determinazione delle probabilità a priori, che dipende da fattori investigativi non sempre quantificabili — la dimensione della popolazione dei possibili autori, le informazioni investigative indipendenti dall'evidenza forense in esame. Il secondo, più sottile, è la *ecological fallacy* dell'interpretazione statistica: la probabilità che un profilo del DNA si osservi in un individuo scelto casualmente dalla popolazione — poniamo uno su dieci miliardi — non è la probabilità che il sospettato sia innocente, perché il sospettato non è stato scelto casualmente dalla popolazione ma è stato individuato attraverso un processo investigativo che già lo connette all'evento in esame. Confondere queste due probabilità — il cosiddetto *prosecutor's fallacy* — è uno degli errori interpretativi più frequenti e più dannosi nell'uso forense delle statistiche di confronto.

IV.6. La traccia come costruzione: il problema della contaminazione

Una delle assunzioni implicite del principio di Locard nella sua versione ingenua è che la traccia sia il prodotto unilaterale dell'evento di contatto da ricostruire, e che essa rimanga stabile e non contaminata fino al momento della sua analisi. Nella pratica investigativa, questa assunzione è sistematicamente violata, e la gestione della contaminazione è uno dei problemi tecnici più delicati della criminalistica moderna.

La scena del crimine è, al momento in cui gli investigatori vi accedono, già un ambiente che ha subito modificazioni multiple dall'evento originario: le azioni dei soccorritori, il passaggio degli investigatori stessi, le modificazioni ambientali dovute a temperatura, umidità, luce. Ogni accesso alla scena introduce nuove tracce che si sovrappongono a quelle originarie, nuove possibilità di contaminazione incrociata, nuovi rischi di cancellazione o alterazione delle strutture da preservare. I protocolli di gestione della scena del crimine — le catene di custodia, le procedure di campionamento con guanti e maschere, la documentazione fotografica e planimetrica sistematica prima di qualsiasi raccolta di reperti — sono tecniche di minimizzazione della contaminazione, non di sua eliminazione.

Il problema della contaminazione rivela una struttura epistemologica fondamentale: la traccia non è semplicemente *lì*, pre-data e in attesa di essere letta; essa è *costruita* attraverso un processo di isolamento, selezione e interpretazione che la trasforma da fatto grezzo in evidenza processuale. Questa costruzione non è arbitraria — è vincolata dalle proprietà fisiche del substrato e dalle procedure standardizzate dell'analisi — ma è pur sempre una costruzione, e come tale introduce le proprie possibilità di errore e distorsione. La traccia come evidenza non è identica alla traccia come fatto fisico.

Questo punto ha una rilevanza filosofica che trascende la tecnica forense: esso tocca la questione, centrale nella filosofia della scienza del Novecento, della *teoria-ladenness* dell'osservazione. Ogni atto di osservazione scientifica — e l'analisi forense è un caso di osservazione scientifica applicata — è guidato da teorie e ipotesi che determinano cosa viene cercato, come viene cercato, e come vengono interpretati i risultati. La traccia forense non è un fatto bruto che parla da sé: è un fatto mediato da una teoria del contatto, da una teoria del meccanismo produttivo della traccia, da una teoria statistica del confronto. Locard sapeva di cercare fibre sulla vittima perché aveva già una teoria di come le fibre si trasferiscono; e questa teoria guidava la sua ricerca verso certe superfici e non altre.

IV.7. Convergenza: la struttura della traccia attraverso i quattro domini

I quattro capitoli del presente saggio hanno percorso domini radicalmente eterogenei — l'algebra lineare e la meccanica quantistica, la filosofia del linguaggio, la paleoicnologia, la criminalistica — accomunati dall'uso del termine traccia. È giunto il momento di articolare con precisione ciò che questa eterogeneità cela in comune e ciò che cela di genuinamente diverso.

La struttura comune si può formulare attraverso tre tratti. Il primo è l'*assenza del produttore*: in tutti i contesti, la traccia è la forma di una presenza assente. Il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho O)$ estrae un numero dal sistema fisico ϱ, ma il sistema fisico nella sua totalità non è presente nel numero; il segno porta la traccia dei segni da cui differisce, ma quegli altri segni non sono presenti nel segno; l'ichnofossile conserva la forma del comportamento dell'organismo, ma l'organismo non è presente nella struttura geometrica della galleria; l'impronta digitale documenta il passaggio del criminale, ma il criminale non è presente nell'impronta.

Il secondo tratto comune è l'*invarianza strutturale*: la traccia conserva un residuo che è invariante rispetto a certe trasformazioni dell'oggetto che la ha prodotta. La traccia matematica è invariante sotto similitudine; la traccia derridiana è iterabile attraverso contesti diversi conservando la sua funzione segnica; l'ichnofossile è classificabile in icnotaxa che si conservano attraverso miliardi di anni di trasformazione evolutiva; la traccia forense è identificativa perché conserva caratteristiche che rimangono stabili attraverso le variazioni ambientali e le successive elaborazioni.

Il terzo tratto è l'*inferenza retrodittiva*: da tutti e quattro i tipi di traccia si risale, attraverso un processo di interpretazione teoricamente mediato, a proprietà del sistema assente che ha prodotto la traccia. Il meccanismo inferenziale varia — è formalmente quantificato nel caso della meccanica quantistica, è abduttivo nel caso dell'ichnofossile, è bayesiano nel caso forense, è ermeneutico nel caso della traccia derridiana — ma la struttura logica è la medesima: effetto → causa, presente → assente, traccia → produttore.

La differenza più profonda tra i quattro domini riguarda il *grado di determinazione* della traccia rispetto al suo produttore. Il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho O)$ è determinato in modo esatto da ϱ e da O: non c'è ambiguità, non c'è interpretazione; il numero è calcolato. La traccia forense ha un grado elevato di determinazione statistica, quantificabile attraverso il likelihood ratio. L'ichnofossile ha un grado intermedio: il comportamento inferibile è circoscritto ma non univocamente determinato. La traccia derridiana è strutturalmente indeterminata: non si chiude mai in un significato definitivo, ma si apre in una catena di rimandi che non ha un termine. Questa gradazione dal determinato all'indeterminato non è una gerarchia di valore epistemologico, ma una variazione nella struttura del rapporto tra la traccia e l'assente che essa documenta.

Ciò che il saggio ha cercato di mostrare è che questa struttura triadica — assenza, invarianza, retrodizione — non è una metafora distribuita su domini eterogenei, ma una forma genuinamente condivisa che si declina in formalizzazioni diverse a seconda del substrato e degli strumenti di analisi disponibili. La traccia, in tutti questi contesti, è il nome di una relazione strutturale tra il presente e l'assente, una relazione in cui l'assente ha impresso nel presente la forma della propria azione senza esservi incluso. È la struttura più elementare dell'inferenza, la condizione di possibilità di ogni ricostruzione del passato a partire dal presente, di ogni conoscenza mediata da effetti piuttosto che da contatto diretto con le cause.

V. Verso un'Epistemologia Generale della Traccia — Parte Prima: Struttura e Fondamenti

V.1. Il problema dell'unità concettuale

Il percorso compiuto nei capitoli precedenti ha attraversato quattro domini la cui eterogeneità è reale e non deve essere dissimulata. L'algebra degli operatori su spazi di Hilbert, la decostruzione derridiana del segno, la paleoicnologia delle successioni sedimentarie precambriane, la criminalistica forense: questi non sono settori adiacenti di una disciplina comune, né varianti di un'unica pratica applicata a contesti diversi. Essi hanno storie proprie, metodologie proprie, criteri di validazione propria, vocabolari tecnici che in larga parte non comunicano. L'uso dello stesso termine — traccia — in ciascuno di questi domini potrebbe essere, e da molti è considerato, una

semplice omonimia: la stessa parola per cose diverse, accomunate da una vaga somiglianza di famiglia nel senso wittgensteiniano, senza unità concettuale profonda.

La tesi che si intende sostenere in questo capitolo conclusivo è più ambiziosa, pur restando entro i limiti di ciò che è dimostrato e di ciò che è soltanto congetturale. La tesi è che i quattro usi del termine traccia condividono una struttura epistemologica genuinamente comune — non una mera metafora distribuita, non una somiglianza superficiale — e che questa struttura può essere articolata in termini sufficientemente precisi da costituire l'abbozzo di un'epistemologia generale della traccia. Tale epistemologia non è ancora sistematicamente sviluppata nella letteratura filosofica, e il presente saggio ha l'ambizione di contribuire alla sua elaborazione, pur consapevole dei propri limiti.

La struttura comune si articola, come si è anticipato nella conclusione del capitolo precedente, attraverso tre tratti: l'assenza del produttore, l'invarianza strutturale del residuo, e l'inferenza retrodittiva. Ma questi tre tratti non sono indipendenti; essi sono le tre facce di un'unica struttura che si può chiamare, con termine provvisorio, la *struttura della testimonianza indiretta*. Nei paragrafi che seguono si cercherà di precisare in che senso questa struttura è unitaria, quali sono i suoi presupposti, e dove si trovano i suoi limiti interni.

V.2. La struttura della testimonianza indiretta

Il termine *testimonianza indiretta* — o, in una formulazione più tecnica, *evidenza indiziaria* — designa una forma di conoscenza in cui l'oggetto non è accessibile all'osservazione diretta ma solo attraverso un effetto che esso ha prodotto su un substrato osservabile. Questa struttura è ubiqua nella scienza e nella vita quotidiana, ma la sua analisi filosofica è sorprendentemente scarsa rispetto alla sua importanza.

Nella fisica delle particelle elementari, nessuna particella subatomica è direttamente osservabile: ciò che si osserva sono le tracce che esse lasciano nei rivelatori — ionizzazione lungo percorsi, segnali nei calorimetri, pattern di decadimento secondario. La particella di Higgs non è stata «vista» al CERN nel 2012: è stata inferita dai prodotti del suo decadimento, cioè dalla traccia statistica della sua esistenza in migliaia di collisioni analizzate. In astronomia, un esopianeta non è in genere direttamente osservabile: viene rivelato dall'effetto gravitazionale che esercita sulla stella che orbita — la variazione periodica della velocità radiale della stella, o la diminuzione periodica del suo flusso durante il transito — oppure dalla deviazione gravitazionale della luce di una stella di sfondo. L'esopianeta è un'assenza che struttura la luce osservabile.

In storia, nessun evento passato è direttamente osservabile: ciò che lo storico studia sono le tracce che quell'evento ha lasciato — documenti scritti, reperti materiali, strutture architettoniche, tradizioni orali cristallizzate in testi, effetti demografici e genetici sulle popolazioni discendenti. L'evento storico è sempre già passato al momento in cui viene studiato; la sua ricostruzione è sempre un'inferenza a partire da tracce, mai una percezione dell'evento stesso.

Questi esempi mostrano che la struttura della testimonianza indiretta non è una peculiarità di certi domini specialistici, ma la struttura normale della conoscenza scientifica su oggetti che eccedono, per ragioni di scala temporale, spaziale o energetica, le capacità di osservazione diretta. L'epistemologia della traccia è, in questa prospettiva, l'epistemologia di larghissima parte della scienza naturale e di tutta la scienza storica.

V.3. Il substrato come memoria: condizioni di possibilità della traccia

Perché ci sia una traccia, occorre che ci sia un *substrato* capace di registrarla e conservarla. Questa condizione, apparentemente ovvia, ha conseguenze non banali. Il substrato non è un supporto passivo e neutro: le sue proprietà fisiche, chimiche e strutturali determinano quali tracce possono essere registrate, con quale risoluzione, per quanto tempo, e con quale fedeltà. Il substrato è una *memoria selettiva*: non conserva tutto dell'evento di contatto, ma seleziona ciò che le sue strutture sono in grado di accogliere e stabilizzare.

La roccia sedimentaria a grana fine registra con alta risoluzione le impronte superficiali ma non conserva strutture chimiche volatili; il vetro di silice registra e conserva la composizione isotopica dei materiali che lo hanno formato ma non le strutture biologiche; il DNA nucleare di un individuo vivente registra l'intera storia evolutiva della sua stirpe con straordinaria fedeltà su scala di milioni di anni, ma si degrada rapidamente dopo la morte a causa dell'attività idrolitica e ossidativa. Ciascun substrato è una finestra con una propria funzione di trasferimento: esso amplifica certe frequenze dell'informazione sull'evento e ne attenua o sopprime altre.

In meccanica quantistica, questa struttura è formalizzata in modo preciso dalla teoria della decoerenza. Un sistema quantistico S in interazione con un ambiente E perde progressivamente la sua coerenza quantistica — la capacità di esibire interferenze — perché le informazioni sul suo stato si diffondono nell'ambiente in modo irreversibile. L'ambiente diventa, attraverso questo processo, un *registro distribuito* dello stato del sistema: ogni grado di libertà ambientale porta un'impronta, una traccia del suo accoppiamento con S. La formula che descrive questo processo è quella dell'evoluzione dell'operatore densità ridotto del sistema:

$$\rho_S(t) = \mathrm{tr}_E \left[U(t) \left(\rho_S(0) \otimes \rho_E(0)\right) U^\dagger(t) \right]$$

dove $U(t)$ è l'operatore di evoluzione del sistema totale $S \otimes E$, $\rho_E(0)$ è lo stato iniziale dell'ambiente, e la traccia parziale su E lascia lo stato ridotto del sistema. Nel limite di ambienti grandi e di accoppiamenti forti, questo stato ridotto converge rapidamente verso uno stato misto diagonale nelle basi preferenziali determinate dall'interazione con l'ambiente — le cosiddette basi di *pointer states*. La decoerenza è, da questa prospettiva, il processo attraverso cui l'ambiente acquisisce informazione sul sistema: l'ambiente porta la traccia del sistema nel senso più letterale, e il sistema perde

coerenza perché le sue informazioni sono ormai distribuite nel substrato ambientale, non più localizzate in correlazioni interne.

V.4. Scala temporale e permanenza: una gerarchia delle tracce

Uno degli aspetti più significativi della struttura della traccia è la sua variazione attraverso le scale temporali. Le diverse discipline che abbiamo esaminato operano su scale temporali incomparabili: la meccanica quantistica si occupa di eventi che si svolgono su scale di 10^{-15} secondi o meno; la criminalistica forense di eventi che risalgono a ore, giorni, al più anni; la paleoicnologia di comportamenti impressi in substrati rocciosi centinaia di milioni di anni fa; la traccia derridiana opera su scale che vanno dalla singola enunciazione a millenni di tradizione testuale.

Questa variazione di scala non è irrilevante per la struttura epistemologica della traccia. Essa introduce una gerarchia di substrati, ordinati per durata della memoria: i substrati geologici conservano tracce per miliardi di anni; i substrati biologici — il DNA — per milioni di anni; i substrati archivistici — la pietra incisa, la pergamena, le tecnologie di registrazione digitale — per migliaia o centinaia di anni; i substrati chimici e biologici degradabili — il DNA di un cadavere, le fibre tessili, le impronte digitali — per anni o decenni; i substrati fisici volatili — la distribuzione di calore in una stanza, l'impronta di un piede su sabbia umida esposta al sole — per ore o minuti.

Questa gerarchia ha una conseguenza epistemologica che vale la pena di articolare esplicitamente: la *densità informativa* della traccia non è monotona rispetto alla scala temporale di conservazione. I substrati a lunga conservazione sono spesso meno informativi per unità di traccia, perché la selezione che operano è più severa — conservano solo ciò che è chimicamente o fisicamente molto stabile — e perché la degradazione progressiva durante il lungo periodo di conservazione riduce la risoluzione. I substrati a breve conservazione possono essere straordinariamente informativi — una scena del crimine fresca contiene centinaia di tipi di tracce diverse — ma la loro lettura è possibile solo entro una finestra temporale ristretta. L'ottimale epistemologico non sta né all'estremo della fugacità né a quello della permanenza assoluta: sta in quella zona intermedia, dipendente dal tipo di evento e di inferenza, in cui il substrato ha conservato abbastanza per permettere la lettura e non tanto da avere già ridotto la traccia a rumore di fondo.

V.5. Il problema dell'interpretazione: il cerchio ermeneutico della traccia

Ogni lettura di una traccia presuppone una teoria del meccanismo produttivo che la ha generata. L'icnologa che interpreta una pista fossile come prodotta da un organismo a locomozione bilaterale presuppone una teoria della biomeccanica del movimento che connette la geometria dell'impronta alla struttura dell'organismo che la ha prodotta. Il criminologo che identifica un profilo del DNA come appartenente a un individuo

presuppone una teoria della trasmissione genetica, delle frequenze alleliche nelle popolazioni, e dei meccanismi di amplificazione della PCR. Il fisico che misura $\mathrm{tr}(\rho O)$ e lo interpreta come valore di aspettazione dell'osservabile O presuppone l'intera struttura formale della meccanica quantistica e la regola di Born. Il filologo che legge nella struttura di un testo medievale la traccia di una tradizione manoscritta precedente presuppone una teoria della trasmissione testuale e dei meccanismi di corruzione e interpolazione.

Questa dipendenza dalla teoria non è un difetto dell'interpretazione delle tracce: è la sua condizione strutturale. Non esiste una lettura innocente, priva di presupposizioni, di una traccia qualsiasi. Ciò non implica che l'interpretazione sia arbitraria — la teoria che informa la lettura è a sua volta vincolata da evidenze indipendenti e sottoposta a revisione critica — ma implica che la traccia non parla da sola, non si autopresenta come evidenza: essa deve essere interrogata attraverso un quadro teorico che specifica quali domande è lecito porle e quali risposte è lecito attendersi.

Questa struttura è quella che nel pensiero ermeneutico, da Schleiermacher a Gadamer, va sotto il nome di *cerchio ermeneutico*: la comprensione di un testo presuppone una precomprensione del tutto, e la comprensione del tutto si costruisce attraverso la comprensione delle parti, in un movimento circolare che non è vizioso ma produttivo, in quanto ogni giro del cerchio affina e corregge la precomprensione precedente. Il cerchio ermeneutico della traccia ha la stessa struttura: si interpreta la traccia attraverso una teoria del meccanismo produttivo, e si corregge la teoria del meccanismo produttivo attraverso l'interpretazione di nuove tracce, in un movimento iterativo di raffinamento reciproco.

La differenza tra i quattro domini non sta nell'assenza o nella presenza del cerchio ermeneutico — esso è presente in tutti — ma nel grado di formalizzazione e di quantificazione con cui si gestisce il circolo. In meccanica quantistica, il cerchio è chiuso dall'esperimento: la teoria fa previsioni numericamente precise che l'esperimento può verificare o falsificare, e il disaccordo tra previsione e risultato produce una pressione di revisione teorica fortemente localizzata. In paleoicnologia e in criminalistica, il cerchio è gestito attraverso protocolli di validazione semiautomatici — analisi in cieco, confronto con database, test statistici — che riducono il rischio di circolarità viziosa senza eliminarlo. Nella traccia derridiana, il cerchio è esplicitamente riconosciuto come struttura fondamentale e non eliminabile: l'interpretazione non pretende di uscire dal cerchio ma di percorrerlo consapevolmente, con attenzione alla propria storicità e ai propri presupposti.

V.6. La traccia e il tempo: retrodizione e predizione

Un tratto che accomuna tutti i contesti esaminati è la direzione temporale dell'inferenza: la traccia documenta il passato, non il futuro. La lettura di una traccia è sempre una *retrodizione* — un'inferenza verso il passato — non una predizione. Questa asimmetria temporale non è accidentale: essa è l'espressione epistemologica dell'irreversibilità termodinamica, della freccia del tempo.

Il secondo principio della termodinamica stabilisce che l'entropia di un sistema isolato non decresce nel tempo. Questa asimmetria macroscopica — che non ha un corrispettivo nelle equazioni microscopiche della meccanica, che sono simmetriche per inversione temporale — è la radice fisica dell'asimmetria tra passato e futuro. Le tracce si formano perché eventi di bassa entropia — un contatto fisico localizzato, la produzione di un segno, il movimento di un organismo su un substrato — producono strutture ordinate in un substrato che senza quell'evento sarebbe in uno stato di entropia più elevata. La traccia è un abbassamento locale di entropia prodotto dall'evento; la sua degradazione nel tempo è il ritorno progressivo all'entropia del background.

Questa connessione tra la struttura della traccia e la termodinamica del non-equilibrio ha una conseguenza precisa: la traccia è asimmetrica rispetto alla direzione del tempo perché lo è la termodinamica. Un universo in cui il secondo principio fosse violato — in cui l'entropia tendesse a diminuire — sarebbe un universo in cui le tracce si cancellano anziché formarsi, in cui il substrato restituisce al sistema la struttura invece di conservarla. In un tale universo, la conoscenza del passato attraverso le tracce sarebbe impossibile per ragioni di principio, non per ragioni di tecnica.

Questa osservazione non è puramente speculativa. La connessione tra la freccia del tempo termodinamica e la possibilità della memoria — sia biologica che fisica — è stata analizzata in profondità da Hans Reichenbach nel suo *The Direction of Time* (1956) e da Huw Price in *Time's Arrow and Archimedes' Point* (1996). Entrambi sottolineano che la nostra capacità di ricordare il passato e non il futuro — di avere tracce del passato ma non del futuro — è connessa all'asimmetria termodinamica: il passato ha lasciato tracce perché era in uno stato di entropia inferiore rispetto al presente; il futuro non ha lasciato tracce perché è, dal punto di vista del presente, ancora indeterminato nella sua entropia. La traccia è l'impronta della freccia del tempo nel substrato.

V.7. La traccia e l'identità: il problema della singolarità

Un problema trasversale a tutti i contesti esaminati è quello della *singolarità*: la traccia documenta un evento singolo, un contatto singolo, un comportamento singolo di un individuo singolo? O documenta piuttosto una classe di eventi, una tendenza statistica, un tipo comportamentale?

La risposta varia a seconda del contesto. In criminalistica, il fine dell'analisi è spesso identificare l'individuo singolo che ha lasciato la traccia: il profilo del DNA mira a connettere la traccia a un individuo unico nella popolazione. Ma anche qui la singolarità è statistica, non logica: si afferma che la probabilità che la traccia provenga da un individuo diverso dal sospettato è di uno su dieci miliardi, non che sia zero. La singolarità è un asintoto verso cui il potere discriminante dell'analisi tende, non un dato.

In paleoicnologia, il fine è opposto: si mira a classificare la traccia in un icnotaxon che designa un tipo comportamentale ricorrente, non a identificare l'individuo che l'ha prodotta. L'individuo produttore è irrecuperabile; ciò che rimane è il pattern comportamentale che la traccia esemplifica. La singolarità dell'evento — questo organismo, in questo momento, su questo substrato — è cancellata dalla classificazione; ciò che sopravvive è la struttura tipologica.

Nel funzionale traccia matematico, la dicotomia non si applica nello stesso modo: tr(A) è un numero che dipende dall'intera matrice A, non da un singolo suo elemento. Ma la relazione tra la traccia e la struttura completa dell'operatore — il fatto che tr(A) sia uguale alla somma degli autovalori ma non determini la distribuzione degli autovalori — mostra che la traccia opera una riduzione dalla singolarità dell'oggetto (questa matrice, con questi autovettori e questi autovalori) alla sua proprietà globale (la somma). La singolarità è parzialmente perduta nella riduzione.

Nella traccia derridiana, la dicotomia è esplicitamente tematizzata attraverso la coppia *singolarità / iterabilità*: ogni atto di iscrizione di una traccia è singolo e irripetibile nel suo contesto originario, ma la struttura della traccia — la sua possibilità di essere citata, riletta, re-iscritta — è essenzialmente iterabile. La traccia non è né puramente singolare né puramente tipologica: essa è il punto di tensione tra la singolarità dell'evento che l'ha prodotta e l'universalità della struttura segnica che le permette di funzionare. Questa tensione è irrisolvibile e costitutiva.

V. Verso un'Epistemologia Generale della Traccia — Parte Seconda: Limiti, Aperture e Conseguenze

V.8. Il limite della traccia: l'evento senza substrato

Ogni epistemologia della traccia deve fare i conti con il suo limite interno: vi sono eventi che non lasciano tracce, non perché le tracce siano andate perdute, ma perché l'evento non ha interagito con alcun substrato capace di conservarle, oppure perché le tracce prodotte sono strutturalmente indistinguibili dal rumore di fondo.

Il primo caso è quello degli eventi che avvengono in assenza di un substrato stabile nelle vicinanze. I processi che si svolgono nel vuoto intergalattico, lontano da qualsiasi superficie su cui la loro firma possa essere impressa, non lasciano tracce accessibili all'osservazione indiretta, a meno che non si propaguino come radiazione elettromagnetica o gravitazionale fino a raggiungere un rivelatore. Le onde gravitazionali rilevate da LIGO a partire dal 2015 sono, in questo senso, tracce di eventi — la fusione di buchi neri — che si sono svolti in regioni dello spazio a densità bassa, lontani da qualsiasi substrato materiale denso, e che hanno tuttavia impresso la

loro firma sulla curvatura dello spazio-tempo stesso, propagatasi poi fino ai rivelatori terrestri. Lo spazio-tempo è, in questo caso straordinario, il substrato universale.

Il secondo caso — le tracce indistinguibili dal rumore — è epistemologicamente più grave. Un evento può aver lasciato tracce in abbondanza, ma se quelle tracce non si distinguono statisticamente dal rumore di fondo del substrato, nessuna inferenza è possibile. Il segnale sepolto nel rumore è, dal punto di vista epistemologico, equivalente all'assenza di segnale: non perché non esista, ma perché non è accessibile agli strumenti di lettura disponibili. La distinzione tra «la traccia non esiste» e «la traccia esiste ma non è leggibile» è reale ma, per l'epistemologia, irrilevante: in entrambi i casi l'inferenza è bloccata.

Questo limite ha una formulazione quantitativa nella teoria dell'informazione. Il teorema di Shannon-Hartley esprime la capacità di canale:

$$C = B \cdot \log_2(1 + S/N)$$

dove C è la capacità massima in bit per secondo, B è la banda del canale, S è la potenza del segnale e N è la potenza del rumore. Quando il rapporto segnale/rumore S/N tende a zero — quando il rumore domina il segnale — la capacità C tende a zero, e nessuna informazione può essere trasmessa attraverso il canale indipendentemente dalla sofisticazione del metodo di decodifica. La traccia completamente sommersa nel rumore è il caso limite in cui la capacità del canale di trasmissione tra evento e osservatore si annulla.

V.9. Il paradosso della traccia completa: l'onnisciente demone e il suo rovescio

Si consideri un caso limite ideale: un substrato di memoria perfetta che registrasse con risoluzione infinita ogni interazione tra ogni coppia di sistemi fisici nell'universo. Tale substrato — un analogo del Demone di Laplace nella forma di un archivio cosmico — conserverebbe le tracce di tutti gli eventi avvenuti, permettendo in linea di principio la retrodizione completa di ogni stato passato dell'universo. Sarebbe questo il compimento di un'epistemologia della traccia?

Il paradosso è che un substrato di memoria perfetta non è fisicamente realizzabile, e questa irealizzabilità non è un limite contingente della tecnologia ma un limite di principio che emerge dalla meccanica quantistica. Il teorema di Wootters e Zurek del 1982 — il *teorema di no-cloning* — stabilisce che è impossibile costruire un dispositivo che produca una copia perfetta di uno stato quantistico arbitrario sconosciuto. Formalmente: non esiste alcun operatore unitario U tale che

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

per ogni stato $|\psi\rangle$ nello spazio di Hilbert. La dimostrazione è elementare e merita di essere riprodotta nella sua essenzialità. Si supponga per assurdo che tale U esista. Allora, per due stati arbitrari $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$:

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$
$$U(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle) = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$$

Prendendo il prodotto interno delle due equazioni e usando l'unitarietà di U — che preserva il prodotto interno — si ottiene:

$$\langle\psi|\varphi\rangle \cdot \langle 0|0\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle \cdot \langle\psi|\varphi\rangle$$

ovvero, dato che $\langle 0|0\rangle = 1$:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^2$$

Questa equazione è soddisfatta solo se $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ oppure $\langle\psi|\varphi\rangle = 1$, cioè solo se $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ sono ortogonali o identici. Un dispositivo di cloning universale è dunque impossibile: nessun substrato fisico può duplicare perfettamente l'informazione quantistica di uno stato arbitrario senza distruggerlo o alterarlo.

Il teorema di no-cloning implica che qualsiasi processo di registrazione di una traccia è necessariamente parziale: il substrato che registra la traccia non può contenere una copia completa dello stato del sistema che con esso ha interagito, perché un tale contenimento richiederebbe la clonazione dell'informazione quantistica del sistema. La traccia fisica è strutturalmente incompleta per ragioni di principio, non per limitazioni tecnologiche. L'archivio cosmico perfetto è fisicamente impossibile: il mondo non può essere la propria memoria completa.

Questo risultato ha una risonanza profonda con la nozione derridiana di archi-traccia. Derrida sostiene che non vi è mai stata una presenza piena che la traccia registrerebbe nella sua interezza; il teorema di no-cloning sostiene che non vi può essere una registrazione fisica completa di alcuno stato. Le due asserzioni provengono da tradizioni radicalmente diverse e operano su oggetti radicalmente diversi, ma convergono nella stessa conclusione: la traccia è strutturalmente parziale, e questa parzialità non è un difetto da correggere ma una proprietà costitutiva della relazione tra evento e registro.

V.10. La traccia e la conoscenza storica: conseguenze per la storiografia

Le considerazioni sviluppate nei paragrafi precedenti hanno conseguenze dirette per la filosofia della conoscenza storica. La storiografia è, nella sua interezza, una scienza delle tracce: essa ricostruisce il passato a partire da documenti, reperti materiali,

strutture architettoniche, tradizioni orali cristallizzate, effetti demografici e genetici. Ogni fonte storica è una traccia nel senso che si è elaborato nel corso del saggio: un residuo dell'assente che porta informazione selettiva sull'evento che lo ha prodotto, mediata dalle proprietà del substrato che lo ha conservato.

Le due grandi tradizioni della filosofia della storia del Novecento possono essere lette come posizioni opposte rispetto alla struttura della traccia. La tradizione positivistica — da Auguste Comte alle versioni novecentesche di Hempel e Nagel — tratta la fonte storica come un dato su cui applicare inferenze di tipo nomologico: si spiega l'evento storico sussumendolo sotto leggi generali, e la traccia è il punto di partenza empirico di questa sussunzione. La traccia è, in questa prospettiva, un campione dell'evidenza, e la conoscenza storica è asimptoticamente comparabile alla conoscenza scientifica delle scienze naturali.

La tradizione ermeneutica — da Dilthey a Gadamer, Ricoeur, e in parte Derrida — sostiene invece che la comprensione storica è strutturalmente diversa dalla spiegazione nomologica, perché il passato storico non è una classe di eventi governati da leggi universali ma un insieme di atti umani determinati da intenzioni, significati e contesti che richiedono interpretazione, non deduzione. La traccia storica non è un campione dell'evidenza ma un testo — nel senso ampio di «tutto ciò che richiede interpretazione» — che deve essere compreso attraverso un atto di ricostruzione del contesto che lo ha prodotto.

L'epistemologia della traccia elaborata in questo saggio suggerisce che la dicotomia tra queste due tradizioni è meno assoluta di quanto i dibattiti metodologici abbiano spesso sostenuto. Entrambe le tradizioni riconoscono che la fonte storica è una traccia — un residuo del passato sul quale si lavora nel presente — e che la conoscenza del passato è sempre indiretta, sempre mediata. La differenza riguarda la struttura dell'inferenza: nomologica e quantificabile nell'approccio positivista, ermeneutica e contestuale nell'approccio interpretativo. Ma questa differenza non è assoluta: le inferenze storiche più solide combinano elementi dei due approcci, usando conoscenze generali — demografiche, economiche, biologiche — come vincoli sull'interpretazione contestuale, e usando la comprensione contestuale come guida per selezionare quali conoscenze generali applicare.

Paul Ricoeur, in *Temps et Récit* (1983–1985), ha proposto la nozione di *refiguration* del tempo attraverso il racconto come la forma specifica della mediazione tra il tempo vissuto e il tempo cosmico che la storiografia opera. La traccia è, nella sua elaborazione, il punto di mediazione tra il passato vissuto — il tempo della coscienza e dell'azione — e il passato documentato — il tempo degli archivi e dei reperti. Il documento non è il passato: è la traccia del passato che permette al presente di riconfigurarsi in relazione a quel passato. Questa mediazione non è mai completa né mai definitiva: ogni lettura delle tracce del passato è anch'essa un evento storico situato, che lascerà a sua volta tracce per le generazioni future.

V.11. La traccia e l'identità personale: il sé come archivio di tracce

Un'ultima apertura merita di essere percorsa, anche se non si può che abbozzarla. La questione dell'identità personale — cosa rende una persona la stessa persona attraverso il tempo — è uno dei problemi centrali della filosofia moderna, da Locke a Hume a Parfit. Locke, nel *Saggio sull'intelletto umano*, propone la teoria della continuità della coscienza come fondamento dell'identità personale: io sono la stessa persona di quella che era bambino se e soltanto se ho coscienza — ovvero memoria — di essere stata quella persona. La memoria è il substrato dell'identità personale nel tempo.

Ma la memoria è, nella struttura elaborata nel presente saggio, un sistema di tracce. Le memorie non sono copie fedeli degli eventi passati: sono ricostruzioni parziali, selettive, soggette a distorsione e a rielaborazione, influenzate dal contesto presente nel momento del ricordo. La neuroscienza della memoria — a partire dai lavori seminali di Frederic Bartlett negli anni Trenta del Novecento, e attraverso la ricerca contemporanea sulla memoria ricostruttiva e sulle false memorie — mostra che il sistema mnestico umano non è un archivio ma un sistema di tracce deformabili: le tracce si modificano ogni volta che vengono riattivate, incorporando elementi del contesto presente nella struttura del ricordo passato. La memoria è un sistema di tracce in continua riscrittura, non un deposito stabile di registrazioni.

Questo ha conseguenze dirette per la teoria dell'identità personale. Se la continuità dell'identità personale è fondata sulla memoria, e la memoria è un sistema di tracce parziali e ricostruttive, allora l'identità personale non è una proprietà stabile e determinata ma un processo continuo di costruzione e ricostruzione narrativa, nel senso di Ricoeur: il sé come testo che si riscrive continuamente a partire dalle proprie tracce, un testo la cui coerenza è il prodotto di una narrazione piuttosto che di una sostanza.

La struttura della traccia — parziale, selettiva, soggetta a degradazione e a rielaborazione, dipendente dal substrato che la conserva — si rivela così non soltanto la struttura della conoscenza scientifica e storica, ma anche la struttura della conoscenza di sé. L'identità personale è anch'essa una forma di retrodizione: la costruzione di una storia coerente del sé a partire da tracce del passato vissuto che sono già sempre parziali, già sempre mediate, già sempre rielaborate. Il sé non è un'origine trasparente a se stessa: è un'interpretazione delle proprie tracce, un testo che si legge mentre si scrive.

V.12. Conclusione: la traccia come struttura elementare del conoscere

Il percorso compiuto permette ora di formulare, in modo necessariamente provvisorio e aperto alla revisione, la tesi epistemologica centrale del saggio. La traccia — nelle sue declinazioni matematica, filosofica, geologica e forense — non è soltanto uno

strumento conoscitivo tra altri: è la *struttura elementare* di una parte vastissima del sapere umano, quella parte che non ha accesso diretto al proprio oggetto ma deve ricostruirlo a partire da residui, impronte, effetti, marche.

Questa struttura si articola, come si è mostrato, attraverso tre momenti: l'assenza del produttore — l'oggetto della conoscenza non è presente nel substrato che lo documenta; l'invarianza strutturale del residuo — la traccia conserva alcune proprietà dell'oggetto assente in modo stabile rispetto a certe trasformazioni; l'inferenza retrodittiva — si risale dall'effetto alla causa, dal presente all'assente, attraverso una catena teoricamente mediata di ragionamenti.

Questa struttura non è un limite della conoscenza: è la forma normale della conoscenza di ciò che eccede la percezione diretta. La fisica delle particelle e la paleontologia, la storiografia e la psicanalisi, la fisica quantistica e la criminalistica condividono questa struttura nella misura in cui tutte ricostruiscono oggetti non direttamente osservabili a partire da effetti che quegli oggetti hanno impresso su substrati accessibili all'osservazione. La differenza tra queste discipline non riguarda la struttura dell'inferenza ma il grado di formalizzazione con cui essa è condotta, la quantificazione dell'incertezza che essa consente, la precisione con cui la teoria del meccanismo produttivo è articolata.

Ciò che accomuna tutte queste pratiche di lettura delle tracce — al di là delle differenze di metodo, di formalizzazione, di oggetto — è la fiducia fondamentale che il mondo sia un sistema in cui gli eventi lasciano impronte stabili su substrati duraturi, e che quelle impronte portino informazione sugli eventi in modo sufficientemente strutturato da permettere l'inferenza. Questa fiducia non è dimostrabile a priori: è una scommessa epistemologica fondamentale sulla coerenza del mondo fisico, una scommessa che la scienza e la storia hanno finora trovato largamente, anche se non illimitatamente, ben fondata.

La traccia è la forma in cui il passato sopravvive nel presente. Non nella sua interezza — il teorema di no-cloning lo esclude per ragioni di principio — e non nella sua trasparenza — il cerchio ermeneutico lo esclude per ragioni strutturali — ma in modo parziale, selettivo, soggetto a interpretazione, e tuttavia reale. La conoscenza del passato attraverso le sue tracce è limitata e mediata, ma è l'unica forma di conoscenza del passato che sia disponibile. E questa disponibilità parziale, questo accesso indiretto e interpretativo, è sufficiente per costruire la fisica delle particelle, la storia delle civiltà antiche, la chimica forense, la comprensione di se stessi. La traccia è poco, rispetto alla pienezza dell'evento che l'ha prodotta. Ma è tutto ciò che il tempo lascia nelle mani del presente.

VI. La Formula della Traccia: Geometria, Spettro e l'Identità Profonda

VI.1. Due registri dello stesso oggetto

Vi è un risultato matematico che incarna la struttura della traccia in un senso più profondo di qualsiasi analogia filosofica: la *formula della traccia*, nelle sue diverse versioni che vanno da Hermann Weyl agli anni Quaranta fino ad Atle Selberg nel 1956 e alle sue generalizzazioni contemporanee. Questo risultato non usa il termine «traccia» per metafora: il funzionale tr compare in modo essenziale nella sua enunciazione, e la sua apparizione è la forma tecnica di un'identità stupefacente tra due modi di descrivere la stessa struttura geometrica — uno che guarda dall'interno dello spazio, l'altro che guarda dall'esterno.

L'idea di fondo può essere espressa in questi termini: su una varietà riemanniana compatta M, l'operatore di Laplace-Beltrami Δ è un operatore differenziale autoaggiunto con spettro discreto di autovalori

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \to +\infty$$

Le autofunzioni φ — le funzioni proprie di Δ con $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ — codificano la geometria di M nel linguaggio dell'analisi armonica. Al tempo stesso, la geometria di M è codificata in modo diverso ma equivalente dalla sua struttura come spazio di cammini: le geodetiche chiuse di M — le curve che tornano al punto di partenza percorrendo la distanza minima — portano un'informazione geometrica intrinseca sulla curvatura e sulla topologia della varietà. La formula della traccia afferma che queste due descrizioni — spettrale e geodetiche — sono in corrispondenza biunivoca e precisa: lo spettro determina le geodetiche e le geodetiche determinano lo spettro, nel senso tecnico che la traccia del nucleo del calore connette le une agli altri attraverso un'identità esatta.

VI.2. Il nucleo del calore e la sua traccia

Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione d. L'*equazione del calore* su M è

$$(\partial/\partial t + \Delta_x)\, u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

La soluzione di questa equazione per dato iniziale f è espressa attraverso il *nucleo del calore* $K(x,y,t)$:

$$u(x,t) = \int_M K(x,y,t)\, f(y)\, dy$$

Il nucleo del calore è la funzione di Green dell'operatore $\partial/\partial t + \Delta$; esso descrive come il calore distribuito secondo f all'istante $t = 0$ si diffonde sulla varietà al tempo $t > 0$. La sua espressione spettrale, ricavata dalla decomposizione in autofunzioni di Δ, è:

$$K(x,y,t) = \sum_{=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\, \varphi(x)\, \varphi(y)$$

dove la serie converge assolutamente e uniformemente per $t > 0$. Questa formula esprime il nucleo del calore come sovrapposizione di modi normali: il modo n decade con costante di tempo $1/\lambda$, e l'autovalore λ governa la velocità di dissipazione del calore nel modo corrispondente.

La *traccia* del nucleo del calore è la funzione

$$Z(t) = \int_M K(x, x, t)\, dx = \Sigma_{=0}^{\infty} e^{-\lambda t}$$

ottenuta integrando il nucleo del calore lungo la diagonale. Questa quantità — l'integrale di $K(x, x, t)$ rispetto alla variabile diagonale x — è esattamente la traccia dell'operatore $e^{-t\Delta}$ nello spazio $L^2(M)$: si ha $Z(t) = \mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$. La traccia opera qui nel senso del capitolo I: essa riduce l'operatore $e^{-t\Delta}$ — un oggetto che vive nello spazio infinito-dimensionale $L^2(M)$ — a un singolo numero $Z(t)$ che dipende dal parametro reale $t > 0$.

Il comportamento asintotico di $Z(t)$ per $t \to 0^+$ è il nucleo dell'analisi spettrale della geometria. Weyl dimostrò nel 1912 che, per $t \to 0^+$:

$$Z(t) \sim (4\pi t)^{-d/2}\, \mathrm{Vol}(M) + c_{d-2}\, t^{1-d/2} + \dots$$

dove $\mathrm{Vol}(M)$ è il volume riemanniano di M e i coefficienti successivi dello sviluppo asintotico — i *coefficienti di Seeley-DeWitt* — sono integrali di invarianti locali della curvatura di M. Il coefficiente del termine di ordine $t^{1-d/2}$ contiene la curvatura scalare integrata; il coefficiente successivo contiene il quadrato della curvatura di Ricci e il quadrato della curvatura sezionale, e così via. Lo sviluppo asintotico di $\mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$ per $t \to 0^+$ è dunque una *lettura dello spettro della curvatura* di M attraverso la traccia dell'operatore del calore: i coefficienti geometrici della varietà si rivelano nell'espansione della traccia di un operatore analitico.

VI.3. La formula di Selberg: geodetiche e spettro in dialogo

La formula della traccia di Selberg approfondisce questa connessione in un contesto geometricamente più ricco: quello delle *superfici iperboliche compatte*, cioè delle superfici riemanniane compatte di curvatura costante -1. Tali superfici si realizzano come quozienti del semipiano superiore $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ con la metrica

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) / y^2$$

da parte di un sottogruppo discreto cocompatto Γ del gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}^2$, isomorfo al gruppo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ delle trasformazioni di Möbius reali. La varietà $M =$

$\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ è una superficie compatta di genere $g \geq 2$, e la sua geometria iperbolica è molto più rigida di quella di una varietà riemanniana generica.

Su questa superficie, l'operatore di Laplace-Beltrami ha spettro discreto $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ Le geodetiche chiuse di M sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio non banali di Γ, e la loro lunghezza $l(\gamma)$ — la lunghezza della geodetica chiusa corrispondente alla classe di coniugio $[\gamma]$ — è determinata dalla traccia dell'elemento γ nella sua rappresentazione in $PSL(2,\mathbb{R})$: se γ è un elemento iperbolico con traccia $tr(\gamma) = 2\cosh(l(\gamma)/2)$, allora $l(\gamma)$ è la lunghezza della geodetica chiusa corrispondente.

La *formula della traccia di Selberg* è l'identità

$$\Sigma\ h(r) = (\mathrm{Area}(M)/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} r\ h(r)\ \tanh(\pi r)\ dr + \Sigma_{[\gamma]\neq e} (l(\gamma) / (2\sinh(l(\gamma)/2))) \hat{h}(l(\gamma))$$

dove:

- $\lambda = 1/4 + r^2$ sono gli autovalori del laplaciano di M (con $r \geq 0$ per $\lambda \geq 1/4$ e r immaginario puro per $\lambda < 1/4$);
- h è una funzione test pari, analitica nella striscia $|\mathrm{Im}(z)| < 1/2 + \varepsilon$, con decadimento rapido sull'asse reale;
- $\hat{h}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\ e^{iru}\ dr$ è la trasformata di Fourier di h;
- la somma a destra è su tutte le classi di coniugio primitivo $[\gamma]$ di Γ e le loro potenze, con $l(\gamma)$ la lunghezza della geodetica primitiva corrispondente.

Il lato sinistro della formula è uno spettrale: è la somma di h valutata sulle frequenze proprie r, cioè una funzione dello spettro di Δ su M. Il lato destro è geometrico: il primo termine dipende dall'area di M (invariante topologico, per il teorema di Gauss-Bonnet: $\mathrm{Area}(M) = 4\pi(g-1)$), il secondo è la somma su tutte le geodetiche chiuse primitive, pesate dalla loro lunghezza e dalla funzione test.

La formula di Selberg afferma dunque che spettro e geodetiche sono due manifestazioni della stessa struttura geometrica, connesse attraverso la traccia. Ogni volta che si calcola la traccia di un operatore analitico costruito a partire dal laplaciano — operatore che «sente» la geometria attraverso le sue autofunzioni — si ottiene un'espressione che è anche una somma su oggetti geometrici globali, le geodetiche chiuse. La traccia è il meccanismo formale attraverso cui l'analitico e il geometrico si riconoscono come la stessa cosa.

VI.4. Il problema inverso spettrale: «si può sentire la forma di un tamburo?»

La formula della traccia ha un'applicazione epistemologicamente fondamentale al *problema inverso spettrale*, reso celebre dalla domanda che Mark Kac pose nel 1966: «Can one hear the shape of a drum?» La domanda ha una formulazione precisa: due varietà

riemanniane isospectrali — con gli stessi autovalori del laplaciano contati con molteplicità — sono necessariamente isometriche?

La domanda è nel linguaggio della traccia: lo spettro $\{\lambda\}$ determina tutta la traccia $Z(t) = \Sigma\, e^{-\lambda t}$, e quindi tutti i coefficienti del suo sviluppo asintotico per $t \to 0^+$. Poiché questi coefficienti sono integrali di invarianti di curvatura, lo spettro determina il volume, la curvatura scalare integrata, e infiniti altri invarianti globali della varietà. Quanto determina? Determina tutta la varietà a isometria?

La risposta — stabilita da Carolyn Gordon, David Webb e Scott Wolpert nel 1992 — è negativa nel caso generale: esistono varietà piane (regioni del piano euclideo con la metrica standard e condizioni al contorno di Dirichlet) isospectrali ma non isometriche. Due tamburi diversi, con la stessa forma dello spettro di frequenze proprie, non sono la stessa forma geometrica. La traccia dello spettro non determina completamente la geometria: essa ne cattura molti invarianti, ma non tutti.

Questo risultato ha la struttura epistemologica che il presente saggio ha analizzato in modo ricorrente. La traccia — qui intesa come lo spettro intero, non soltanto il funzionale tr di un singolo operatore — è un residuo invariante ricchissimo di informazione sulla geometria, ma non è la geometria stessa. Essa porta informazione selettiva: cattura gli invarianti locali della curvatura e certi invarianti globali topologici, ma non la disposizione globale della geometria nel senso pieno. Ci sono aspetti della forma che la traccia non riesce a «sentire». L'analogia con gli altri contesti è precisa: il funzionale $\mathrm{tr}(\varrho)$ non determina completamente lo stato ϱ; l'ichnofossile non determina completamente l'organismo; la formula della traccia non determina completamente la geometria.

VI.5. La formula esplicita di Riemann e le tracce dell'aritmetica

Prima di lasciare il dominio della geometria spettrale, vale la pena di menzionare — anche se soltanto per accennarne la struttura, senza pretendere di svilupparla nella sua pienezza tecnica — un'altra formula della traccia che ha lo stesso rango concettuale di quella di Selberg: la *formula esplicita di Riemann*, che connette la distribuzione dei numeri primi con gli zeri della funzione zeta di Riemann.

La funzione zeta di Riemann è definita per $\mathrm{Re}(s) > 1$ dalla serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$$

dove il prodotto euleriano è esteso su tutti i numeri primi p. Il prolungamento analitico di $\zeta(s)$ al piano complesso — ottenuto da Riemann nel 1859 — presenta zeri in due categorie: gli *zeri banali* agli interi negativi pari $s = -2, -4, -6, \ldots$, e gli *zeri non banali* nella striscia critica $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. L'ipotesi di Riemann afferma che tutti gli zeri non banali giacciono sulla retta critica $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

La formula esplicita di Riemann esprime la funzione di conteggio dei primi $\pi(x)$ — il numero di primi minori o uguali a x — in termini degli zeri della funzione zeta:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \Sigma_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \log(2) + \int_{x}^{\infty} dt/(t(t^2-1)\log(t))$$

dove la somma è su tutti gli zeri non banali ρ di $\zeta(s)$ e $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log(t)$ è il logaritmo integrale. Questa formula ha la struttura di una formula della traccia: la distribuzione dei numeri primi — oggetti aritmetici discreti — è espressa come sovrapposizione di oscillazioni determinate dagli zeri di $\zeta(s)$, che sono l'analogo aritmetico delle geodetiche chiuse nella formula di Selberg. Anzi, la corrispondenza è formale e precisa: la formula di Selberg per una superficie iperbolica e la formula esplicita di Riemann per i numeri primi hanno la stessa struttura algebrica, con i numeri primi nel ruolo delle geodetiche primitive e gli zeri della zeta nel ruolo degli autovalori del laplaciano.

Questa analogia — sviluppata da vari matematici nel corso del Novecento e portata alla sua forma più precisa da Alain Connes nell'ambito della geometria non commutativa — suggerisce che dietro la distribuzione dei numeri primi vi sia una struttura geometrica iperbolica nascosta, uno spazio di cui i numeri primi sarebbero le geodetiche e gli zeri della zeta lo spettro del laplaciano. La traccia di questo spazio ipotetico sarebbe la funzione zeta stessa. Questa prospettiva non è ancora dimostrata — è anzi una delle grandi congetture aperte della matematica contemporanea — ma la struttura della traccia è il linguaggio in cui essa è formulata.

VI.6. La traccia nei sistemi dinamici: formula di Lefschetz e periodicità

Un ulteriore contesto in cui il funzionale traccia emerge con forza è la teoria dei sistemi dinamici, attraverso la *formula di Lefschetz*. Sia $f : M \to M$ una mappa continua di una varietà compatta M in se stessa. Il *numero di Lefschetz* di f è definito come

$$L(f) = \Sigma \ (-1)^k \mathrm{tr}(f^*_k)$$

dove $f^*_k : H(M; \mathbb{R}) \to H(M; \mathbb{R})$ è la mappa indotta da f in omologia di grado k con coefficienti reali. La somma alterna delle tracce delle mappe indotte in omologia produce un invariante globale della mappa.

Il *teorema del punto fisso di Lefschetz* afferma che se $L(f) \neq 0$, allora f ha almeno un punto fisso. Più precisamente, la formula di Lefschetz per i sistemi dinamici discreti (versione di Atiyah-Bott) esprime la somma dei contributi locali ai punti fissi di f come uguale al numero di Lefschetz:

$$L(f) = \Sigma_{\{f(x)=x\}} \mathrm{sign}(\det(I - Df(x)))$$

dove la somma è sui punti fissi di f (assunti isolati e non degeneri) e Df(x) è il differenziale di f nel punto fisso x. La traccia delle mappe indotte in omologia — il numero di Lefschetz — è uguale alla somma delle proprietà locali ai punti fissi.

Questa formula ha la struttura della formula della traccia di Selberg: un invariante globale calcolato attraverso la traccia (il lato omologico) è uguale a una somma su oggetti locali — i punti fissi e le loro proprietà dinamiche (il lato geometrico). La traccia è ancora il tramite tra il globale e il locale, tra la struttura spettrale e la struttura geometrica. Ed è ancora una forma di testimonianza: il numero di Lefschetz porta la traccia — nel senso del funzionale — dell'azione di f sulle classi di omologia, e questa traccia porta a sua volta informazione sui punti fissi, che sono la traccia geometrica — nel senso dell'impronta — dell'azione di f sulla varietà.

La formula di Lefschetz è dunque il punto in cui le due accezioni di traccia — il funzionale algebrico e l'impronta geometrica — si incontrano in un'identità matematica precisa. Non per metafora, non per analogia: il funzionale traccia delle mappe in omologia è letteralmente uguale alla conta dei punti in cui la mappa lascia un'impronta di se stessa — un punto fisso, cioè un punto in cui la mappa coincide con l'identità. I punti fissi sono i luoghi dove f si lascia «sorprendere» a essere se stessa, i punti dove l'azione non lascia traccia di spostamento. La traccia algebrica conta questi momenti di autocoincidenza: è la misura di quanto una trasformazione «torna a se stessa».

VII. Abduzione e b

Charles Sanders Peirce — logico, filosofo, matematico, fondatore del pragmatismo americano — ha prodotto nel corso della sua vita una logica dell'inferenza di straordinaria ricchezza, rimasta in larga misura incompresa dai contemporanei e riscoperta sistematicamente soltanto nel corso del Novecento. Al centro di questa logica sta la tripartizione delle forme inferenziali in deduzione, induzione e abduzione, una tripartizione che Peirce ha elaborato e ridefinito nel corso di decenni, con formulazioni non sempre coerenti tra loro, ma con un nucleo stabile che è pertinente in modo diretto al problema della lettura delle tracce.

La *deduzione* procede dal generale al particolare: date una regola e un caso, si conclude il risultato. Se tutti i fagioli in questo sacchetto sono bianchi (regola) e questi fagioli vengono da questo sacchetto (caso), allora questi fagioli sono bianchi (risultato). La conclusione è necessaria: se le premesse sono vere, la conclusione non può essere falsa. La deduzione espande la necessità delle premesse nella conclusione senza aggiungere nuova informazione.

L'*induzione* procede dal particolare al generale: osservando che certi casi hanno certi risultati, si formula una regola. Se questi fagioli vengono da questo sacchetto e questi fagioli sono bianchi, si inferisce che tutti i fagioli nel sacchetto sono bianchi. La

conclusione non è necessaria — potrebbe essere falsa anche se le premesse sono vere — ma è supportata da esse in un senso probabilistico che la logica dell'induzione cerca di quantificare. L'induzione espande le osservazioni particolari verso una generalizzazione.

L'*abduzione* — che Peirce chiama anche *retroduzione* o, nelle sue formulazioni più tarde, *ipotesi* — ha una struttura diversa da entrambe. Essa procede da un risultato sorprendente e da una regola che, se vera, lo spiegherebbe, alla conclusione che il caso vale: se questi fagioli sono bianchi (risultato sorprendente) e tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi (regola), allora questi fagioli vengono probabilmente da questo sacchetto (caso). L'abduzione è l'inferenza che introduce una nuova ipotesi per spiegare un fatto osservato: essa è la logica della scoperta scientifica, della diagnosi medica, della soluzione di un enigma poliziesco.

VII.2. La struttura formale dell'abduzione e i suoi limiti

La forma logica dell'abduzione, nella versione tarda di Peirce, è la seguente:

Il fatto sorprendente F è osservato.
Ma se l'ipotesi H fosse vera, F sarebbe ovvio (o atteso).
Dunque vi è ragione per sospettare che H sia vera.

La conclusione è epistemicamente debole: l'abduzione non conclude che H è vera, nemmeno con una certa probabilità. Essa conclude soltanto che H merita di essere presa in considerazione, che vi è una ragione non nulla per sospettarla vera, che essa è un'ipotesi da testare ulteriormente attraverso deduzioni che producano previsioni verificabili. L'abduzione è il primo passo del ciclo scientifico, non l'ultimo.

Questa debolezza epistemica dell'abduzione è al tempo stesso la sua forza logica: è l'unica forma inferenziale capace di introdurre novità concettuale. La deduzione e l'induzione operano sempre all'interno di un sistema di concetti e regole già disponibili; esse possono espandere l'applicazione di concetti noti, ma non possono in linea di principio introdurre un'ipotesi genuinamente nuova. L'abduzione, invece, compie un salto: dall'osservazione di un fatto al suggerimento di una causa o struttura che potrebbe spiegarlo. Questo salto non è garantito dalla logica — non c'è un meccanismo formale che assicuri che l'ipotesi giusta venga abducta dall'osservazione — ma è cognitivamente necessario per qualsiasi avanzamento della conoscenza.

Peirce stesso riconobbe il carattere paradossale dell'abduzione: essa è necessaria per la scienza ma non è giustificabile dalla logica formale. La sua giustificazione è pragmatica: se la scienza è possibile — se gli esseri umani riescono a produrre teorie corrette del mondo — allora la facoltà abduttiva deve avere un'efficacia non casuale, deve essere in qualche modo calibrata sulla struttura del mondo. Peirce chiamò questa calibrazione *istinto logico* o *musement*: la capacità della mente umana di indovinare le

ipotesi giuste con una frequenza superiore al caso, grazie a una sorta di sintonia evolutiva con i pattern del reale.

VII.3. L'abduzione come logica della traccia

L'applicazione della struttura abduttiva alla lettura delle tracce è immediata e illuminante. Si consideri il lavoro del paleontologo che interpreta un ichnofossile. Il fatto sorprendente è la struttura geometrica preservata nel sedimento: una galleria ramificata con pareti rivestite da palline di sedimento compattato, di diametro uniforme, orientata secondo un gradiente di nutrienti. L'ipotesi che, se vera, renderebbe questo fatto ovvio è: un crostaceo decapode del gruppo Thalassinidea ha scavato questa galleria in un substrato sabbioso di battigia, rivestendo le pareti con materiale fecale compattato per stabilizzarle. L'abduzione conclude: vi è ragione per attribuire questa traccia a un'attività comportamentale di questo tipo, da verificare attraverso il confronto con tracce prodotte da organismi viventi analoghi in condizioni simili.

Il fatto che l'abduzione sia la forma inferenziale propria della lettura delle tracce non è occasionale. La traccia è precisamente un *fatto sorprendente*: non si presenta con la propria spiegazione incorporata, non rivela da sé il meccanismo che l'ha prodotta. Essa è, nel senso di Peirce, un *segno indicale* — un segno che sta per il suo oggetto in virtù di una connessione causale reale con esso — ma questa connessione causale non è percepibile direttamente nell'indice: deve essere inferita. L'abduzione è la logica di questa inferenza.

Peirce distingue tre tipi di segni: l'*icona* (che sta per il suo oggetto in virtù di somiglianza), l'*indice* (in virtù di connessione causale o spaziotemporale) e il *simbolo* (in virtù di una convenzione). Le tracce sono paradigmaticamente indicali: l'ichnofossile sta per l'organismo produttore non perché gli assomigli, non perché sia convenzionalmente associato ad esso, ma perché è stato causalmente prodotto dalla sua attività. L'impronta digitale sta per il dito che l'ha impressa non per somiglianza (l'impronta non assomiglia al dito) ma per causalità: è il calco del dito, il risultato diretto del contatto. La traccia derridiana è più complessa — è un indice che tende a simbolizzarsi, perché le catene causali che connettono il segno al suo oggetto passano attraverso la convenzione sociale e la storia della lingua — ma anche qui la dimensione indicale è costitutiva.

VII.4. Carlo Ginzburg e il «paradigma indiziario»

Lo storico Carlo Ginzburg ha proposto, nel saggio «Spie: radici di un paradigma indiziario» pubblicato nel 1979 e poi raccolto in *Miti, emblemi, spie* (1986), una ricostruzione storica e teorica del paradigma della lettura delle tracce che converge con l'analisi di Peirce da una direzione diversa e complementare. Ginzburg individua, alla fine dell'Ottocento, la nascita di un paradigma epistemologico unitario in tre domini apparentemente lontani: la critica d'arte attribuizionista di Giovanni Morelli, il metodo

investigativo di Sherlock Holmes nel romanzo di Conan Doyle, e la psicoanalisi freudiana.

Morelli, nelle sue ricerche sull'attribuzione dei dipinti rinascimentali, propose di basare l'identificazione dell'autore non sulle caratteristiche più evidenti e più facilmente imitabili — la composizione, la tecnica del chiaroscuro, l'espressione dei personaggi principali — ma sui dettagli minori che il pittore eseguiva meccanicamente, senza riflettere: la forma dei lobi dell'orecchio, il modo in cui le dita si articolano, la curvatura delle unghie. Questi dettagli, non soggetti al controllo consapevole, porterebbero la traccia autentica della mano individuale del pittore: sono la forma in cui la soggettività del creatore si lascia sfuggire proprio dove abbassa la guardia.

Holmes legge i dettagli trascurati — il tipo di fango sugli stivali, la calliosità su un dito, la piega dell'abito — come indizi che portano la traccia di una storia che nessuno ha raccontato ma che il contatto con certi ambienti e certi oggetti ha impresso sul corpo del soggetto. Il suo metodo è esplicitamente abduttivo: dal fatto insolito all'ipotesi esplicativa, e dall'ipotesi alle previsioni testabili. Ginzburg nota che Conan Doyle attribuisce questo metodo a un personaggio che è un medico — il dott. Watson è il narratore, Holmes è il diagnostico — e che il paradigma indiziario ha radici profonde nella semiotica medica, nell'arte della diagnosi come lettura dei sintomi.

Freud, nella sua pratica clinica, coltiva la stessa sensibilità per i dettagli marginali: il lapsus, il sogno, il sintomo apparentemente insignificante sono per lui i luoghi in cui l'inconscio si manifesta proprio perché il controllo consapevole si allenta. L'analisi freudiana è la lettura delle tracce che l'inconscio lascia sulla superficie del comportamento manifesto: non le grandi narrazioni del paziente, sempre soggette a censura e razionalizzazione, ma i minimi scarti, le piccole anomalie, le hesitations che rivelano ciò che il soggetto non sa di sapere.

VII.5. La logica del caso singolare e il problema della prova

Ginzburg identifica in questi tre casi una struttura comune che contrappone al paradigma galileiano della scienza — fondato sulla ripetibilità dell'esperimento, sulla quantificazione, sull'astrazione dai casi individuali — un paradigma diverso, fondato sull'interpretazione del caso singolare irripetibile. Il quadro di Giorgione o di Tiziano è uno; il crimine avvenuto quella notte è uno; il sogno di quel paziente in quell'ora è uno. Non si può fare un esperimento controllato su un caso singolare; non si possono applicare leggi statistiche a un individuo. Eppure la conoscenza di questi singolari è possibile, e il paradigma indiziario è il modo in cui essa si realizza.

Questa osservazione tocca un punto che il saggio ha incontrato più volte: il problema della singolarità. Come si può conoscere con certezza adeguata un evento singolare, irripetibile, non suscettibile di generalizzazione statistica? La risposta del paradigma indiziario è: attraverso la lettura di tracce che quel singolare ha lasciato, mediante

inferenze abduttive che producono ipotesi da verificare attraverso la coerenza e la completezza della spiegazione che esse forniscono.

Il criterio di validazione dell'abduzione non è la probabilità statistica — non si può in genere quantificare la probabilità a priori delle ipotesi sulla paternità di un dipinto o sull'identità del criminale — ma la *coerenza narrativa*: l'ipotesi giusta è quella che rende coerente il maggior numero di dettagli precedentemente inspiegabili, che collega tra loro tracce che senza di essa apparirebbero casuali, che fa di un insieme di fatti sparsi una storia compiuta. L'abduzione valida non è quella che ha la maggiore probabilità a priori, ma quella che ha il maggiore potere esplicativo e la maggiore coerenza interna.

VII.6. Il limite dell'abduzione: la sottodeterminazione

Ogni teoria della traccia deve fare i conti con il problema della *sottodeterminazione*: le tracce disponibili possono essere compatibili con più ipotesi rivali, e nessun criterio formale garantisce che la migliore spiegazione disponibile sia quella vera. Peirce era consapevole di questo limite: l'abduzione è l'inferenza più rischiosa delle tre, quella che più spesso produce ipotesi false, quella la cui validazione richiede il maggior lavoro deduttivo e induttivo successivo.

La sottodeterminazione è particolarmente grave nei contesti in cui le tracce sono scarse, degradate o selezionate in modo sistematicamente distorto. La paleoicnologia delle successioni precambriane — dove le tracce sono rare, spesso mal preservate, e dove la teoria del meccanismo produttivo è poco calibrata per mancanza di analoghi viventi — è il caso estremo: le ipotesi abduttive su certi icnofossili controversi rimangono genuinamente incerte per ragioni di principio, non soltanto per insufficienza del record disponibile.

In criminalistica, la sottodeterminazione è gestita attraverso la molteplicità delle evidenze: nessuna singola traccia è sufficiente per identificare un individuo o ricostruire un evento, ma la convergenza di tracce indipendenti — che supportano la stessa ipotesi provenendo da substrati e meccanismi diversi — riduce drasticamente lo spazio delle ipotesi compatibili. Il principio di Locard implica che ogni contatto lascia tracce multiple e di tipo diverso; l'investigazione forense cerca di sfruttare questa molteplicità per triangolare verso una ricostruzione univoca.

La convergenza di tracce indipendenti è anche il criterio epistemologico che Peirce chiama *consilience of inductions* — un termine che riprende da William Whewell — e che nella filosofia della scienza contemporanea è stato analizzato da Philip Kitcher e da William Wimsatt come criterio di robustezza: un'ipotesi è robusta quando è supportata da evidenze indipendenti, quando la sua validità non dipende da un unico tipo di traccia o di misurazione, quando la rimozione di qualsiasi sottoinsieme delle evidenze lascia comunque la restante struttura a supportarla. La robustezza non garantisce la verità — nulla lo fa — ma è la forma più forte di conferma empirica disponibile per ipotesi sul caso singolare irripetibile.

VII.7. Semiotica, sintomo e traccia: Eco e il segno come traccia

Umberto Eco, nel suo lavoro su semiotica e teorie dell'interpretazione — in particolare in *Semiotica e filosofia del linguaggio* (1984) e in *I limiti dell'interpretazione* (1990) — ha ripreso e sviluppato il paradigma indiziario di Ginzburg in connessione con la semiotica peirceana, proponendo una teoria del *segno* come traccia nel senso più ampio. Per Eco, il segno non è semplicemente una relazione convenzionale tra significante e significato: nella sua radice più profonda, il segno è il residuo di una causalità che connette il segnale alla sua fonte. Il sintomo medico è il caso paradigmatico: il pallore è un segno dell'anemia non per convenzione ma perché è causato dalla riduzione dell'emoglobina circolante. La convenzione — il codice medico che insegna a leggere il pallore come segno di anemia — si costruisce sopra una relazione causale preesistente.

Eco distingue tra *segni deboli* — dove la connessione con la causa è mediata da convenzione sociale e richiede un codice per essere interpretata — e *segni forti* — dove la connessione causale è diretta e relativamente indipendente dalla convenzione. Le tracce, nel senso del presente saggio, appartengono al secondo tipo: esse portano la loro causalità incorporata nella struttura fisica del substrato, non nelle regole di un codice. L'ichnofossile non richiede un codice per essere connesso al comportamento dell'organismo produttore; richiede una teoria del meccanismo produttivo, ma questa teoria è di natura fisica e biologica, non convenzionale.

Questa distinzione è importante perché mostra dove la semiotica della traccia diverge dalla semiotica del segno linguistico. La traccia derridiana — come si è visto nel capitolo II — riguarda i segni linguistici e convenzionali, e la sua analisi si applica propriamente alla struttura dell'iterabilità e della differenza nel segno convenzionale. La traccia icnologica e la traccia forense riguardano invece indici fisici con una causalità incorporata, e la loro lettura richiede una teoria causale, non un'ermeneutica della convenzione. L'epistemologia della traccia deve essere abbastanza ampia da comprendere entrambi i tipi, senza confonderli.

VII.8. La traccia e l'esistenza: ontologia dell'indizio

C'è infine una questione ontologica che percorre l'intera analisi e che merita di essere formulata esplicitamente, anche se non può essere risolta nel presente contesto. La traccia è un modo di *essere*? O è soltanto un modo di *conoscere* — una struttura epistemologica che riguarda il rapporto tra il soggetto conoscente e il suo oggetto, non una proprietà dell'oggetto stesso?

La distinzione non è banale. Se la traccia fosse soltanto epistemica — se il fatto che X sia una traccia di Y dipendesse interamente dal punto di vista di un osservatore che interpreta X come segno di Y — allora la nozione di traccia non avrebbe autonomia

ontologica: ci sarebbe X, ci sarebbe Y, e ci sarebbe la relazione inferenziale che un osservatore stabilisce tra loro. Ma questa visione urta contro la struttura causale della traccia fisica: l'impronta nel sedimento è la forma che il sedimento ha assunto per effetto del comportamento dell'organismo, indipendentemente da qualsiasi osservatore. La relazione causale è reale; l'interpretazione è reale; la relazione tra interpretazione e causalità è ciò che si chiede di chiarire.

La posizione più convincente — e quella che emerge dalla convergenza dei quattro domini analizzati nel saggio — è che la traccia è un *modo di essere relazionale* che presuppone tre termini: il produttore P, il substrato S, e l'evento di contatto E. L'evento E produce una modifica del substrato S che è determinata dalle proprietà di P; questa modifica è la traccia di P in S. La relazione è ontologica — esiste indipendentemente dall'osservatore — ma la sua interpretazione come traccia richiede un soggetto che riconosca la modifica di S come determinata da P, e che abbia una teoria del meccanismo produttivo E. La traccia esiste; la sua *lettura come traccia* è un atto epistemico. Questa distinzione tra l'esistenza della traccia e la sua lettura come traccia è forse la distinzione più sottile e più importante dell'intera epistemologia della traccia, e resta aperta a ulteriori elaborazioni.

VIII. Freud: la Bahnung, il Notes Magico e la Memoria come Sistema di Tracce

VIII.1. Il problema neurologico del 1895

Nel settembre del 1895 Sigmund Freud redasse in poco più di tre settimane un manoscritto che non pubblicò mai e che consegnò all'amico Wilhelm Fliess con istruzioni di non divulgarlo. Il testo, ritrovato tra la corrispondenza dopo la morte di entrambi e pubblicato postumo nel 1950 con il titolo *Entwurf einer Psychologie* — talvolta tradotto come *Progetto di una psicologia* — è uno dei documenti più singolari nella storia del pensiero scientifico: un tentativo sistematico di fondare la psicologia sulla neurofisiologia, di costruire un modello dell'apparato mentale usando i concetti della biologia nervosa disponibili a fine Ottocento. Il tentativo fallisce — Freud lo sapeva — ma il fallimento è straordinariamente fecondo, perché nel suo seno nascono i concetti che organizzeranno l'intera impresa psicoanalitica successiva, e tra questi il concetto di traccia occupa un posto fondamentale.

Il punto di partenza del *Progetto* è un'assunzione neurofisiologica: il sistema nervoso è composto da neuroni — cellule la cui esistenza era stata stabilita da Santiago Ramón y Cajal negli anni immediatamente precedenti, contro la teoria del reticolo di Golgi — e il suo funzionamento consiste nel passaggio di quantità di eccitazione da neurone a neurone attraverso le giunzioni di contatto, che Freud chiama *barriere di contatto* e che la neurologia moderna chiamerà sinapsi, termine coniato da Charles Sherrington nel 1897. L'apparato nervoso ha un principio di funzionamento fondamentale: la tendenza

a mantenere la propria quantità totale di eccitazione al livello più basso possibile, scaricando le eccitazioni in ingresso attraverso percorsi motori. Questo è il *principio di costanza*, che Freud mutua da Gustav Theodor Fechner e che diventerà la base del *principio di piacere* nella metapsicologia matura.

VIII.2. La Bahnung: solchi, facilitazioni e la fisica della memoria

Entro questo schema neurofisiologico, Freud affronta il problema che è al cuore di qualsiasi teoria della mente: come si spiega la memoria? Come può un sistema il cui principio è la scarica dell'eccitazione conservare traccia delle eccitazioni passate? La risposta che Freud elabora — e che si rivelerà straordinariamente duratura, sopravvivendo al crollo dell'intero impianto neurologico del *Progetto* — si fonda sulla distinzione tra due classi di neuroni.

I neuroni della prima classe — i neuroni φ (phi) — sono *permeabili*: lasciano passare l'eccitazione senza opporvi resistenza e senza esserne modificati. Essi mediano la percezione del mondo esterno: ricevono stimoli, li trasmettono, e ritornano al loro stato iniziale senza aver conservato traccia alcuna del passaggio. I neuroni della seconda classe — i neuroni ψ (psi) — sono *impermeabili*: oppongono resistenza al passaggio dell'eccitazione, e ogni volta che l'eccitazione li attraversa, la resistenza si riduce leggermente, il percorso diventa più agevole. Questa riduzione progressiva della resistenza — la *Bahnung*, letteralmente *apertura di un solco*, *facilitazione* — è il meccanismo fisico della memoria: una traccia si forma nel sistema nervoso ogni volta che un'eccitazione percorre un certo tragitto attraverso i neuroni ψ, perché quel tragitto diventa lievemente più percorribile per le eccitazioni future.

La memoria, in questa teoria, non è un deposito di rappresentazioni: è una modificazione strutturale del substrato nervoso, una differenza nella resistenza delle barriere di contatto tra neuroni. Il ricordare non è recuperare qualcosa di conservato in un luogo; è riattraversare un percorso già percorso, un percorso che la sua stessa percorrenza ha reso più facile. La traccia mnestica freudiana del 1895 è dunque fisicamente precisa: è la differenza nella conduttanza sinaptica prodotta dalla stimolazione passata. Essa non è una rappresentazione dell'evento trascorso: è l'impronta che l'evento ha lasciato nel substrato, modificandone le proprietà fisiche.

Questa teoria ha una conseguenza fondamentale che Freud sottolinea con forza: il sistema nervoso deve essere allo stesso tempo *recettivo* e *mnemonico*, capace di registrare stimoli sempre nuovi e di conservare le tracce di quelli passati. Ma questi due requisiti sono in tensione: un sistema perfettamente recettivo sarebbe azzerato da ogni nuovo stimolo; un sistema perfettamente mnemonico sarebbe saturato dalle tracce passate e incapace di recepirne di nuove. Freud risolve questa tensione attraverso la doppia classe di neuroni: i φ sono recettivi e privi di memoria; i ψ sono mnemonici e capaci di accumulare facilitazioni. La percezione e la memoria sono allocate a substrati distinti.

VIII.3. Il *Wunderblock* del 1925: la metafora compiuta

Trent'anni dopo il *Progetto* — ma con una continuità concettuale che Freud stesso riconosce — il breve saggio *Notiz über den "Wunderblock"* del 1925 riprende lo stesso problema in una forma purificata da qualsiasi pretesa neurologica esplicita. La scrittura è più limpida, la struttura argomentativa più agile; ma la domanda è esattamente la stessa: come può un sistema avere memoria illimitata e recettività illimitata simultaneamente?

Il punto di partenza è la critica agli strumenti ordinari di scrittura. Un foglio di carta ordinario conserva tutto ciò che vi si scrive, ma la sua superficie si riempie e non è più disponibile per nuove scritture: esso ha memoria illimitata ma recettività limitata. Una lavagna può essere cancellata e riportata alla disponibilità per nuove scritture: essa ha recettività illimitata ma memoria nulla — ciò che si cancella è perduto. Nessuno dei due strumenti possiede entrambe le proprietà simultaneamente.

Il *Wunderblock* — il notes magico, un giocattolo commerciale dell'epoca — è un dispositivo che combina le due proprietà. Esso consiste in una tavoletta di cera ricoperaa da due strati di materiale trasparente: uno strato inferiore di carta cerata e uno strato superiore di celluloide. Si scrive premendo con uno stilo sulla celluloide, che preme a sua volta sulla carta cerata, che preme sulla cera sottostante. La pressione produce una traccia visibile: la carta cerata aderisce alla cera nei punti premuti, diventando meno trasparente e producendo un segno scuro visibile attraverso la celluloide. Per cancellare, si solleva lo strato superiore dalla tavoletta di cera: la carta cerata si stacca e l'immagine scompare dalla superficie — la superficie è di nuovo disponibile, recettiva a nuove scritture. Ma nella cera sottostante rimane una traccia permanente della pressione esercitata dallo stilo: un solco lieve, impercettibile a guardare la superficie, ma fisicamente presente.

La superficie del notes magico è recettiva all'infinito: può ricevere nuove scritture senza limite, purché si sollevi il foglio di tanto in tanto. La cera sottostante è mnemonica all'infinito: conserva la traccia di ogni pressione ricevuta, accumulando strati di scritture sovrapposte. Il prezzo di questa duplicità è la *dissociazione* tra la memoria e ciò che è attualmente visibile: ciò che si vede sulla superficie è soltanto la scrittura più recente; le tracce precedenti sono nella cera, non leggibili direttamente ma strutturalmente presenti, pronte a influenzare — attraverso i solchi già tracciati — la forma che assumeranno le scritture future.

VIII.4. La lettura derridiana: «Freud et la scène de l'écriture»

È in questo punto che il saggio sulla traccia acquista la sua piena profondità storica, perché il collegamento tra il *Wunderblock* di Freud e la nozione derridiana di archi-traccia non è un'analogia proposta dal presente autore: è la fonte esplicita che

Derrida analizza nel saggio «Freud et la scène de l'écriture», incluso in *L'écriture et la différence* del 1967 e dunque contemporaneo a *De la grammatologie*. Questo saggio è il luogo in cui la nozione derridiana di traccia riceve la sua giustificazione più elaborata.

Derrida legge nel *Wunderblock* un modello dell'apparato psichico che mette in scacco la metafisica della presenza in modo più radicale di quanto Freud stesso avesse inteso. La superficie del notes magico — la parte recettiva, aperta al presente — è il luogo della coscienza, della percezione attuale; la cera sottostante — il luogo delle tracce permanenti — è il luogo dell'inconscio, della memoria inconscia, di tutto ciò che ha preceduto il momento presente e ne struttura silenziosamente le possibilità. Ma il rapporto tra i due livelli non è quello tra un originale e una copia, tra la vera vita e il suo deposito: la cera *non è mai stata* la superficie. La traccia nella cera non è la rappresentazione degradata di un contenuto che era prima sulla superficie: è qualcosa che non è mai apparso sulla superficie nella sua forma completa, che è sempre già stato nella cera, già nascosto nel momento stesso della sua iscrizione.

Derrida vede in questa struttura la confutazione più precisa del modello della presenza piena: se l'apparato psichico funziona come il *Wunderblock*, allora non vi è mai stato un momento in cui un contenuto era presente nella coscienza in forma pura, non mediata, non già inscritta. La coscienza — la superficie — è già sempre alimentata da tracce che non ha prodotto, da solchi nella cera che precedono ogni scrittura attuale e ne condizionano la forma. Il presente della percezione è già attraversato da tracce del passato; la traccia non è il passato degradato del presente, ma la struttura stessa del presente come tale.

Questa lettura trasforma il *Wunderblock* da metafora neurologica in ontologia dell'apparato psichico: la memoria non è un deposito separato dalla coscienza ma la struttura stessa entro cui la coscienza opera, il substrato su cui ogni percezione si iscrive e da cui ogni percezione è già condizionata. Non vi è percezione senza traccia preesistente; non vi è traccia che non sia già la traccia di un'altra traccia. Questa regressione non ha un terminus a quo: l'archi-traccia derridiana è la forma di questo regresso senza fondo, la struttura di un'origine che è già sempre differita.

VIII.5. La Bahnung nella neurosciologia contemporanea

Sarebbe superficiale arrestarsi alla lettura filosofica senza verificare in quale misura la teoria freudiana della Bahnung ha trovato conferma o confutazione nella neurosciologia successiva. La risposta è complessa e merita di essere articolata con precisione.

Il meccanismo fondamentale che Freud ipotizzò — una modificazione strutturale delle giunzioni sinaptiche come substrato fisico della memoria — ha trovato un supporto sperimentale straordinariamente solido a partire dagli anni Settanta del Novecento. Il fenomeno della *potenziazione a lungo termine* (long-term potentiation, LTP), descritto per la prima volta da Timothy Bliss e Terje Lømo nel 1973

sull'ippocampo del coniglio, è precisamente la riduzione della soglia di attivazione sinaptica prodotta dalla stimolazione ripetuta: una sinapsi che ha trasmesso segnali forti e ripetuti diventa più efficace nelle trasmissioni successive, riducendo la quantità di stimolo necessaria a provocare una risposta. La Bahnung freudiana — la facilitazione prodotta dal percorso ripetuto — è il LTP.

Il meccanismo molecolare del LTP è ora ben compreso: la stimolazione intensa della sinapsi attiva i recettori NMDA (N-metil-D-aspartato) del glutammato, che funzionano come rilevatori di coincidenza — si aprono solo quando la cellula postsinaptica è già parzialmente depolarizzata, cioè quando la sinapsi riceve un segnale forte mentre la cellula è già attiva. L'apertura dei canali NMDA permette l'ingresso di ioni calcio, che attivano chinasi come la CaM-KII (calmodulina-chinasi II), che a sua volta fosforila e inserisce nella membrana postsinaptica nuovi recettori AMPA, aumentando permanentemente la conduttanza della sinapsi. La memoria a lungo termine richiede, oltre all'LTP, la sintesi di nuove proteine e la crescita di nuovi contatti sinaptici — un processo che ha un corrispettivo nella distinzione freudiana tra tracce mnestiche di breve e di lunga durata, tra una facilitazione transitoria e un solco strutturalmente permanente.

Ciò che la neurosciologia contemporanea non ha trovato — e che Freud anticipò con il *Progetto* e Lashley cercò invano per trent'anni — è una localizzazione puntuale della traccia mnestica in un neurone o in un insieme circoscritto di neuroni. Lashley, nel suo lavoro *In Search of the Engram* del 1950, concluse mestamente che ogni parte della corteccia cerebrale sembrava equivalente a ogni altra per l'immagazzinamento delle memorie: le lesioni corticali di qualsiasi regione producevano deficit mnestici proporzionali alla loro estensione, non alla loro localizzazione. La memoria era, per Lashley, equipotenzialmente distribuita. I modelli connessionisti contemporanei — le reti neurali artificiali che nella loro architettura più profonda discendono concettualmente da questa tradizione — danno ragione a Lashley: la traccia è distribuita sull'intera struttura delle connessioni modificate, non localizzata in alcun neurone singolo. Questo ha una conseguenza epistemologica precisa: una traccia distribuita è strutturalmente più robusta di una localizzata — una lesione puntuale non la cancella — ma è anche meno direttamente leggibile, meno accessibile all'osservazione diretta. La traccia neurologica è reale, è fisica, è il LTP distribuito su un insieme di sinapsi; ma è invisibile all'osservazione di ogni singolo nodo della rete.

VIII.6. L'inconscio come sistema di tracce: conseguenze per l'epistemologia della memoria

La teoria freudiana della Bahnung, integrata con i risultati della neurosciologia molecolare e con la critica derridiana, permette di precisare in modo sostanziale le osservazioni sulla memoria che il capitolo V aveva abbozzato in forma più sommaria.

La memoria non è una registrazione passiva di eventi: è una struttura di tracce che si modificano ogni volta che vengono riattivate. Il fenomeno della *riconsolidazione* — descritto in modo sperimentalmente convincente da Karim Nader, Glenn Schafe e

Joseph LeDoux in un articolo di *Nature* del 2000 — mostra che ogni volta che una traccia mnestica viene richiamata alla coscienza, essa entra in uno stato labile in cui può essere modificata prima di essere ri-stabilizzata: il ricordo, nel momento stesso del suo recupero, è temporaneamente vulnerabile alla cancellazione o all'alterazione. La memoria non è un archivio stabile da cui si recuperano i dati: è un processo di ri-scrittura continua, in cui le tracce del passato vengono ogni volta lievemente riscritte nel contesto del presente.

Questa struttura ha conseguenze dirette per il problema dell'identità personale e per l'epistemologia storica. Se le tracce del passato soggettivo si modificano ogni volta che vengono riattivate, allora il passato personale non è un dato fisso che la memoria conserva fedelmente: è una costruzione sempre in corso, plasmata dal presente non meno che dall'evento originario. Ciò non significa che il passato sia fictizio o che la memoria non abbia affidabilità: significa che l'affidabilità della memoria è strutturalmente limitata e contestualmente dipendente, e che le distorsioni non sono anomalie patologiche ma conseguenze normali del meccanismo di ri-scrittura. La testimonianza oculare — il tipo di evidenza giuridica tradizionalmente considerato più attendibile — è, alla luce di questi risultati, sistematicamente inaffidabile per ragioni fisiologiche profonde, non per malafede o distrazione dei testimoni.

La struttura di ri-scrittura della memoria rispecchia, a livello neurologico, la struttura della traccia derridiana: nessuna traccia è mai identica a se stessa, perché ogni sua attivazione la modifica lievemente, la ricontestualizza, la inscrive nuovamente in un presente che non era presente al momento della sua prima formazione. La iterabilità derridiana — la possibilità del segno di essere ripetuto in contesti diversi con effetti di senso diversi — non è soltanto una struttura del linguaggio: è la struttura stessa della memoria biologica, il modo in cui il substrato nervoso gestisce la conservazione e il recupero dell'informazione passata. Freud aveva visto questo con il *Wunderblock*; la neurosciologia molecolare lo ha confermato con esperimenti sugli animali; la filosofia della differenza lo aveva tematizzato come struttura fondamentale del segno. I tre percorsi convergono verso la stessa struttura, ciascuno con il proprio vocabolario e i propri strumenti di verifica.

IX. Marc Bloch: Traccia Volontaria, Traccia Involontaria e l'Epistemologia della Fonte Storica

IX.1. Un libro incompiuto e una distinzione fondamentale

Marc Bloch redasse l'*Apologie pour l'histoire, ou Métier d'historien* in condizioni di clandestinità, tra il 1941 e il 1943, mentre partecipava alla Resistenza francese.

Arrestato dalla Gestapo nel marzo del 1944, fu fucilato il 16 giugno dello stesso anno nei pressi di Lione. Il manoscritto, ritrovato incompleto, fu pubblicato postumo nel 1949 a cura di Lucien Febvre. Questo contesto — un libro scritto di nascosto da uno dei più grandi storici del Novecento, interrotto dalla morte violenta del suo autore — non è irrilevante per il suo contenuto: nell'*Apologie* Bloch riflette sulla natura del mestiere storiografico con l'urgenza di chi sa che il passato può essere cancellato, che le tracce possono essere distrutte, che la memoria collettiva ha nemici reali e non soltanto concettuali.

La distinzione che Bloch introduce tra *testimonianze volontarie* e *testimonianze involontarie* è, nell'economia del presente saggio, la più importante contribuzione della storiografia all'epistemologia della traccia. Essa inverte in modo sistematico la gerarchia intuitiva delle fonti storiche, e la sua dimostrazione è al contempo semplice e devastante per le concezioni ingenue della conoscenza storica.

IX.2. La testimonianza volontaria e il suo paradosso

Per testimonianza volontaria Bloch intende qualsiasi fonte prodotta con l'intenzione esplicita di informare i posteri — di lasciare una traccia che documenti certi eventi, certi fatti, certe verità. In questa categoria rientrano le cronache medievali, le memorie politiche, le biografie ufficiali, i monumenti commemorativi, le iscrizioni celebrative, i trattati diplomatici redatti per la pubblicità, i dispacci concepiti per circolare. Sono le fonti che la tradizione storiografica ha a lungo trattato come il materiale primario della ricostruzione storica, le fonti verso cui lo storico si orientava istintivamente quando cercava di capire cosa era accaduto.

Il paradosso che Bloch identifica è questo: precisamente perché queste fonti sono state prodotte con l'intenzione di trasmettere un messaggio, esse sono sistematicamente distorte dalla volontà del loro produttore. Chi scrive una cronaca per informare i posteri decide cosa includere e cosa omettere, seleziona i fatti in funzione del messaggio che vuole trasmettere, li interpreta secondo le categorie ideologiche, religiose o politiche del proprio tempo, e tace su tutto ciò che considera irrilevante o dannoso per l'immagine che vuole proiettare. La testimonianza volontaria è una traccia la cui struttura è determinata non soltanto dall'evento che documenta ma anche — e spesso soprattutto — dall'intenzione comunicativa del suo produttore. Questa intenzione è un filtro che si interpone tra l'evento e il lettore futuro, e che il lettore deve imparare a riconoscere e a compensare.

Il caso più estremo è quello della propaganda: le iscrizioni dei faraoni egizi, i bas-rilievi assiri che celebrano vittorie militari, le cronache dei regimi totalitari del Novecento sono testimonianze esplicitamente distorte, in cui l'intenzione di trasmettere una certa versione degli eventi ha quasi completamente sopraffatto qualsiasi fedeltà al fatto. Ma il problema non riguarda soltanto i casi palesi di menzogna intenzionale: riguarda anche le testimonianze redatte in buona fede. Uno storico medievale che scrive una cronaca delle crociate in buona fede omette automaticamente tutto ciò che gli sembra

ovvio e non bisognoso di spiegazione — la struttura sociale del suo tempo, le pratiche economiche ordinarie, le credenze religiose condivise — perché quelle cose non gli sembrano degne di nota. Per lo storico moderno, è esattamente quelle cose ovvie che spesso sarebbe più importante conoscere, e che la testimonianza volontaria non registra proprio perché le dà per scontate.

IX.3. La testimonianza involontaria e la sua superiorità epistemica

Per testimonianza involontaria Bloch intende qualsiasi fonte prodotta senza l'intenzione di informare i posteri, che ha lasciato traccia di sé per ragioni indipendenti da qualsiasi proposito testimoniale. In questa categoria rientrano i prezzi di mercato registrati nei libri contabili, i testamenti, i contratti privati, le lettere non destinate alla pubblicazione, gli strumenti di lavoro ritrovati negli scavi, le strutture abitative abbandonate, il polline conservato nei sedimenti palustri, i resti alimentari nelle cucine, il DNA degli individui inumati nelle necropoli. Queste fonti non hanno voluto essere testimonianze: sono le tracce che l'attività ordinaria degli esseri umani ha lasciato nei substrati più diversi, senza alcuna intenzione comunicativa.

La superiorità epistemica della testimonianza involontaria rispetto a quella volontaria è precisamente la conseguenza della sua involontarietà: poiché chi ha prodotto questa traccia non intendeva comunicare nulla, non ha potuto distorcere la traccia in funzione del messaggio che voleva trasmettere. I prezzi di mercato medievali non sono stati falsificati dal mercante che li registrava per i propri scopi contabili; essi riflettono direttamente le condizioni reali dell'offerta e della domanda, della stagionalità dei raccolti, delle perturbazioni prodotte da guerre e carestie. Il polline conservato nei sedimenti di un lago non è stato selezionato da nessun filtro ideologico: riflette direttamente la composizione della vegetazione nell'area durante il periodo in cui si è depositato, e permette di ricostruire il clima e il paesaggio con una precisione che nessuna fonte scritta potrebbe fornire. Gli scheletri umani nelle necropoli non hanno mentito sulla propria dieta, sulle malattie sofferte, sui traumatismi subiti: portano incisa nella struttura ossea la storia biologica dell'individuo, una storia che nessuna volontà ha potuto modificare.

L'inverso del paradosso della testimonianza volontaria vale qui: precisamente perché queste fonti non avevano l'intenzione di comunicare, esse non hanno avuto i mezzi per distorcere il loro messaggio. La traccia involontaria è, in senso tecnico, più *autentica* — non nel senso di più vera nel giudizio morale, ma nel senso di meno mediata dall'intenzione soggettiva del produttore.

IX.4. La lettera e lo spirito: applicazioni concrete

Bloch illustra questa distinzione con un esempio che ha la forza delle grandi immagini storiografiche. Si pensi a due tipi di fonti per la storia sociale della Francia medievale: da un lato le cronache dei signori feudali, che descrivono la struttura della società

secondo le categorie dell'ordine divino — i tre stati, gli oratores che pregano, i bellatores che combattono, i laboratores che lavorano — e che affermano la naturalità e la necessità di questa gerarchia; dall'altro i registri delle tasse, i contratti agrari, le liste dei servi della gleba, i testamenti dei mercanti, i libri paga delle corporazioni. Le prime fonti dicono ciò che i loro autori pensavano della società, ciò che volevano che i posteri credessero di essa; le seconde mostrano come la società funzionava effettivamente, quali erano i rapporti reali di proprietà, di dipendenza e di scambio, indipendentemente da come i contemporanei li teorizzavano o li legittimavano.

Lo storico che si limita alle cronache conosce l'ideologia medievale della società; lo storico che analizza i registri contabili e i contratti conosce la struttura reale delle relazioni di produzione e di redistribuzione. I secondi dati sono quasi sempre più utili per capire le dinamiche di lungo periodo — le trasformazioni dell'economia, la lenta erosione dei vincoli feudali, la nascita dei ceti urbani — precisamente perché non sono stati prodotti per essere capiti in questo modo. La struttura dei prezzi medievali rivela, a chi sa leggerla, le crisi demografiche prodotte dalla peste nera con una precisione che nessuna cronaca dell'epoca, per quanto dettagliata, potrebbe eguagliare.

Un secondo esempio, ugualmente illuminante, riguarda il linguaggio. Il vocabolario di una lingua — in particolare i prestiti lessicali, i calchi semantici, i termini tecnici specifici di certi domini — è una testimonianza involontaria della storia dei contatti tra culture, delle trasformazioni delle pratiche materiali, dei cambiamenti nelle strutture sociali. Il fatto che in italiano «algebra», «algoritmo», «alchimia», «alambicco», «azimut» e centinaia di altri termini tecnici e scientifici siano prestiti dall'arabo non è il prodotto di alcuna intenzione comunicativa di chi questi termini usava: è la traccia involontaria di un periodo storico in cui la cultura islamica era il principale veicolo di trasmissione del sapere scientifico e tecnologico nell'Europa medievale. Nessun cronachista ha scritto «gli arabi ci hanno insegnato la matematica e la chimica»; ma il vocabolario della matematica e della chimica italiana lo dice da sé, senza volerlo dire, attraverso la traccia involontaria dei prestiti lessicali.

IX.5. Il critico delle fonti e il paradigma indiziario

La conseguenza metodologica di questa distinzione è il fondamento dell'*analisi critica delle fonti*, che Bloch considera il contributo più duraturo del positivismo storiografico ottocentesco all'epistemologia storica, al di là dei limiti che quella tradizione ha mostrato sul piano teorico. La critica delle fonti è la pratica sistematica di interrogare ogni fonte sul suo tipo di traccia — volontaria o involontaria, diretta o indiretta — e di regolare l'affidabilità delle inferenze in funzione di questa interrogazione.

Questa pratica ha la struttura dell'abduzione peirceana, come si è visto nel capitolo VII: si parte da un fatto sorprendente — questa fonte afferma X — si interroga il meccanismo produttivo della fonte — è una testimonianza volontaria prodotta con quale intenzione comunicativa? da quale posizione sociale? in quale contesto politico? — si formula un'ipotesi sul grado e sul tipo di distorsione che il meccanismo produttivo ha introdotto — e si corregge l'inferenza di conseguenza. La critica delle fonti non porta a conclusioni certe: porta a conclusioni calibrate, alle quali è associata

una stima del grado di affidabilità che dipende dal tipo di traccia e dalla qualità dell'analisi del meccanismo produttivo.

Bloch porta questa critica alle sue conseguenze più radicali, che includono la stessa nozione di «testimone oculare» come garanzia epistemica. Il testimone oculare è colui che ha visto l'evento direttamente; la sua testimonianza è storicamente considerata la più attendibile. Ma il testimone oculare è sempre anche un testimone *volontario*: egli sceglie cosa ricordare, in quale ordine narrare, con quale enfasi presentare i fatti, attraverso quali categorie interpretare ciò che ha visto. La sua testimonianza è mediata dalla sua posizione, dalla sua formazione, dalle sue aspettative e dai suoi interessi. Bloch, che era stato combattente nella Prima guerra mondiale e che sapeva per esperienza diretta quanto distorto fosse il rapporto tra l'esperienza vissuta e la narrazione che se ne fa, era profondamente scettico nei confronti del primato del testimone oculare. Una buona serie di prezzi è spesso più informativa di una buona cronaca.

IX.6. Il rapporto con la paleoicnologia e la criminalistica

La distinzione di Bloch tra testimonianza volontaria e involontaria getta una luce ulteriore sui due domini analizzati nei capitoli III e IV, chiarendo in che senso la traccia involontaria ha una struttura epistemologicamente privilegiata rispetto alla traccia intenzionale.

L'ichnofossile è per definizione una traccia involontaria: l'organismo che scavava la galleria o percorreva la superficie del sedimento non intendeva documentare la propria attività per i geologi del futuro. Esso lasciava tracce perché non poteva non lasciarle — perché il contatto fisico tra il corpo e il substrato produce necessariamente una modifica del substrato — e non perché volesse comunicare alcunché. Questa involontarietà è la ragione per cui l'ichnofossile è una fonte particolarmente affidabile per certi tipi di inferenza comportamentale: esso non è stato distorto da nessuna intenzione comunicativa, non riflette nessuna visione del mondo, non ha interesse a presentare il comportamento in un certo modo piuttosto che in un altro. La traccia è quella che è perché il comportamento era quello che era.

Nella criminalistica, la distinzione di Bloch illumina la differenza tra prove documentali e prove forensi materiali. Una lettera, un memorandum, una registrazione audio sono testimonianze volontarie: chi le ha prodotte aveva un'intenzione comunicativa che può avere distorto il contenuto. Un'impronta digitale, una fibra tessile, un profilo del DNA sono testimonianze involontarie: chi li ha depositati non aveva alcuna intenzione di depositarli, e il meccanismo fisico della deposizione non è influenzato da alcuna volontà comunicativa. Per questa ragione, le prove forensi materiali — quando correttamente analizzate e interpretate — sono epistemicamente più solide delle prove documentali: il criminale può mentire, ma le sue cellule epidermiche no.

Il principio di Locard — ogni contatto lascia una traccia — è, nella sua struttura epistemologica profonda, il principio della testimonianza involontaria applicato alla scena del crimine: ogni interazione fisica tra due sistemi lascia una traccia del contatto nel substrato, una traccia che non riflette alcuna intenzione del suo produttore e che proprio per questo porta un'informazione meno distorta sull'evento di quanto non farebbe qualsiasi narrazione volontaria dell'evento stesso. La criminalistica è, in questa prospettiva, l'arte di leggere le testimonianze involontarie prodotte dall'evento criminale, privilegiandole sistematicamente rispetto alle testimonianze volontarie — le dichiarazioni, le confessioni, le narrazioni dei testimoni — che la giurisprudenza tradizionale aveva a lungo messo al centro del processo.

IX.7. I limiti della distinzione: l'involontario come categoria problematica

La distinzione di Bloch tra volontario e involontario è euristica e potente, ma non priva di complicazioni che meritano di essere registrate. La prima complicazione riguarda il grado di involontarietà: pochissime fonti storiche sono interamente prive di qualsiasi intenzionalità, così come pochissime sono interamente controllate dall'intenzione del produttore. I contratti agrari medievali sono testimonianze involontarie della struttura economica, ma sono testimonianze volontarie delle categorie giuridiche dell'epoca, delle formule notarili convenzionali, della concezione del rapporto tra signore e servo che le parti accettavano come ovvia. Il polline nei sedimenti è interamente involontario rispetto alla storia umana, ma è il prodotto delle strategie riproduttive delle piante, e queste strategie hanno una loro «intenzionalità» biologica — la massimizzazione della dispersione del polline — che può introdurre distorsioni nella rappresentazione della vegetazione circostante.

La seconda complicazione riguarda la *relazionalità* dell'involontarietà: una fonte può essere involontaria rispetto a certe domande e volontaria rispetto ad altre. I prezzi medievali sono involontari rispetto alla struttura economica che riflettono, ma sono volontari rispetto alla scelta di quali transazioni registrare e come categorizzarle, una scelta che rispecchia le categorie concettuali del mercante che teneva i libri. Non esiste una fonte puramente involontaria in senso assoluto: l'involontarietà è sempre relativa a un certo tipo di domanda e a un certo tipo di informazione che si cerca di estrarre dalla fonte.

La terza complicazione riguarda la *leggibilità differenziale*: le tracce involontarie, proprio perché non erano destinate a essere lette, richiedono spesso strumenti di lettura molto più sofisticati di quelli necessari per le testimonianze volontarie. Un cronachista medievale ha scritto in latino, in un latino che uno storico moderno può imparare a leggere con qualche mese di studio; ma i prezzi medievali richiedono la capacità di interpretare sistemi monetari complessi e variabili, di correggere le differenze di misura tra regioni e epoche, di ricostruire le reti di distribuzione che collegavano i mercati locali. Il polline nei sedimenti richiede la padronanza della palinologia, della tassonomia delle specie vegetali, dei metodi di datazione radiometrica. La traccia

involontaria è epistemicamente più ricca, ma anche epistemicamente più costosa da decifrare.

IX.8. L'involontario e la struttura della testimonianza indiretta

Queste complicazioni non indeboliscono la distinzione di Bloch: la rafforzano, precisandone il dominio di validità. La distinzione non è una dicotomia assoluta ma uno *spettro*: le fonti storiche si distribuiscono lungo un continuum che va dall'interamente involontario — il polline, il DNA degli individui sepolti, le tracce fossili — all'interamente volontario — la propaganda, il manifesto, il monumento commemorativo — con la grande maggioranza delle fonti collocata in posizioni intermedie, parzialmente distorte dall'intenzione e parzialmente trasparenti all'evento.

Ciò che la distinzione di Bloch aggiunge all'epistemologia generale della traccia elaborata nei capitoli precedenti è la dimensione dell'*intenzionalità del produttore* come variabile che modifica la struttura epistemica della traccia. La traccia non è soltanto il residuo di un evento fisico su un substrato: può essere anche il prodotto di un'intenzione comunicativa che usa l'evento come pretesto per costruire un messaggio. In questo secondo caso, la struttura della testimonianza indiretta si complica: non si tratta più semplicemente di inferire l'evento dal suo effetto sul substrato, ma di inferire l'evento dall'effetto che esso ha prodotto su un substrato già in parte strutturato dall'intenzione del produttore. L'intenzione è un secondo meccanismo produttivo che si sovrappone al meccanismo fisico, e la critica delle fonti è l'arte di distinguere i due contributi, di separare — per quanto possibile — ciò che la traccia deve all'evento e ciò che deve all'intenzione di chi l'ha prodotta.

Questa complicazione non annulla la struttura della testimonianza indiretta ma la stratifica: tra l'evento e l'osservatore non vi è un solo substrato, ma una catena di substrati — l'evento fisico, la percezione del testimone, l'intenzione comunicativa del produttore della fonte, il substrato materiale su cui la fonte è iscritta, la catena di trasmissione che ha portato la fonte fino al presente — ciascuno dei quali introduce le proprie trasformazioni, le proprie selezioni, i propri rumori. La storiografia critica è il lavoro di risalita attraverso questa catena, la pratica sistematica di identificare e compensare le distorsioni introdotte a ogni anello, nella consapevolezza — che Bloch aveva in modo acuto — che questa risalita non è mai completa, che l'evento nella sua pienezza originaria rimane sempre parzialmente inaccessibile, e che la conoscenza del passato è sempre una costruzione approssimata e perfettibile, non una ricostruzione definitiva.

X. Il Vestigium Dei: Agostino, Bonaventura e la Teologia della Traccia

X.1. Una priorità storica spesso dimenticata

L'analisi filosofica della traccia come struttura epistemologica e ontologica non comincia con Derrida, né con Peirce, né con Freud. Essa ha radici profonde nella tradizione teologica cristiana medievale, dove il concetto di *vestigium* — letteralmente impronta, orma, traccia — occupa un posto sistematico nell'articolazione del rapporto tra il Creatore e le creature, tra l'assoluto e il contingente, tra ciò che è pienamente reale e ciò che partecipa della realtà in modo derivato e imperfetto. Questa tradizione non è un antefatto curioso da registrare per completezza storica: essa ha elaborato una teoria della traccia di notevole precisione concettuale, che precede di secoli le versioni moderne e che pone problemi ancora pertinenti. Ignorarla sarebbe una forma di presentismo storiografico che il presente saggio intende evitare.

Il punto di partenza è Agostino di Ippona, che nel *De Trinitate* — composto tra il 399 e il 419 d.C., opera della maturità intellettuale che egli stesso considerò tra le più impegnative della sua vita — elabora una dottrina sistematica delle tracce della Trinità nelle creature. Il punto di arrivo, per questo capitolo, è Bonaventura da Bagnoregio, che nell'*Itinerarium mentis in Deum* del 1259 porta questa dottrina alla sua forma più compiuta e più elegante, trasformandola in una pedagogia dell'ascesa contemplativa attraverso la lettura delle tracce del divino nel mondo sensibile.

X.2. Agostino: i vestigia Trinitatis e la struttura trinitaria delle creature

Il problema teologico che motiva la dottrina agostiniana dei vestigia non è epistemologico in senso primario: è cristologico e trinitario. Agostino deve spiegare in che senso le creature — prodotte da Dio — portano in sé qualcosa di Dio, senza cadere nel panteismo (che identificherebbe Dio con il mondo) né nel deismo di un Dio che non lascia alcuna impronta di sé nelle cose che crea. La soluzione che egli elabora è la dottrina del *vestigium Trinitatis*: ogni creatura, in quanto prodotta dalla Trinità, porta in sé una struttura trinitaria — non perché sia divina, non perché condivida la natura di Dio, ma perché la struttura dell'atto creativo si imprime nell'effetto come una traccia si imprime nel substrato.

La dottrina si articola in modo diverso a seconda del tipo di creatura considerata. Nelle creature inferiori — i corpi, gli enti materiali — Agostino individua una traccia trinitarian debole, un semplice vestigium: la struttura di misura, numero e peso (*mensura, numerus, pondus*) che ogni cosa materiale porta in sé come forma della sua determinazione. Questa triade — la misura che circoscrive l'estensione della cosa, il numero che la articola internamente, il peso che la orienta verso il suo fine naturale — è una traccia della Trinità nel senso che riflette, in modo analogico e lontano, la struttura trinitaria dell'origine. Non è una somiglianza ma un'impronta: come l'impronta di un sigillo nella cera porta la forma del sigillo senza avere la natura del sigillo.

Nelle creature superiori — gli esseri razionali, l'anima umana — la traccia si fa più precisa e diventa *immagine* (*imago*): non soltanto vestigium ma qualcosa di strutturalmente più prossimo all'originale. L'anima umana, per Agostino, porta in sé una trinità di potenze — memoria, intelligenza e volontà (*memoria, intelligentia, voluntas*) — che è la traccia più fedele della Trinità accessibile alle creature. La memoria conserva il passato dell'anima, l'intelligenza lo conosce nel presente, la volontà lo orienta verso il futuro; le tre potenze sono una sola anima come le tre Persone sono un solo Dio. Questa struttura non è una dimostrazione dell'esistenza della Trinità — Agostino sa benissimo che la ragione da sola non può dimostrare ciò che la fede accoglie — ma è una via di intelligenza della Trinità per chi già la crede: le tracce nel mondo sensibile e nell'anima umana illuminano il mistero dall'interno, rendono la fede più comprensibile a se stessa.

X.3. La gerarchia del vestigio: traccia, immagine, somiglianza

La tradizione agostiniana distingue sistematicamente tre gradi di partecipazione delle creature alla perfezione divina, ciascuno dei quali corrisponde a un tipo diverso di traccia: il *vestigium*, l'*imago* e la *similitudo*. Questa gerarchia è di straordinario interesse per l'epistemologia della traccia, perché essa articola in modo preciso diversi gradi di densità informativa nel residuo che l'assente lascia nel presente.

Il *vestigium* è la traccia nel senso proprio e più tenue: indica che la cosa è stata prodotta da Dio, che porta in sé il segno della sua origine causale, ma non porta in sé alcuna informazione sulla natura specifica dell'origine. Un'impronta di piede nel fango porta l'informazione che qualcuno è passato, ma non necessariamente la forma del piede con fedeltà sufficiente a identificare il passante. Il vestigium è un indice nel senso di Peirce — connette la creatura alla causa — ma senza mirroring strutturale tra la traccia e il tracciatore.

L'*imago* è qualcosa di più: non soltanto il segno del passaggio ma la riproduzione parziale della struttura dell'origine. L'immagine porta in sé qualcosa della forma dell'originale, non soltanto la marca della sua causalità. La trinità di memoria, intelligenza e volontà nell'anima umana è un'immagine della Trinità perché ne riproduce — in modo finito e analogico — la struttura tripartita; non soltanto perché è stata causalmente prodotta dalla Trinità. L'immagine ha un grado di fedeltà strutturale che il mero vestigium non possiede.

La *similitudo* è il grado più alto, la somiglianza piena: la conformazione dell'immagine all'originale attraverso la grazia, il processo di *deificatio* o *theosis* che la teologia cristiana indica come il fine ultimo dell'esistenza umana. La similitudine non è una struttura naturale delle creature — non si trova nelle cose materiali né necessariamente nell'anima umana come tale — ma è il risultato di un processo di trasformazione che orienta la creatura verso il suo archetipo divino.

Questa gerarchia — vestigium, imago, similitudo — è, nella sua sostanza epistemologica, una gerarchia di densità informativa: il vestigium porta poca informazione sulla struttura dell'origine; l'imago ne porta di più; la similitudo tende verso l'identità strutturale con l'originale. La stessa struttura si ritrova, traslata in un registro completamente diverso, nella discussione del capitolo IV sul grado di determinazione della traccia rispetto al suo produttore: il funzionale tr(ϱO) come traccia densa e quantitativamente precisa, la traccia forense come traccia con alta densità informativa statistica, l'ichnofossile come traccia a media densità, la traccia derridiana come traccia strutturalmente indeterminata. La gerarchia agostiniana è la versione teologica della stessa struttura epistemologica.

X.4. Bonaventura: l'*Itinerarium mentis in Deum*

Bonaventura da Bagnoregio compose l'*Itinerarium mentis in Deum* — L'itinerario della mente verso Dio — nel 1259, durante un ritiro contemplativo sul Monte Verna dove Francesco d'Assisi aveva ricevuto le stigmate trentasei anni prima. Il testo è breve — sei capitoli più un prologo — ma di una densità intellettuale straordinaria: esso condensa in poche decine di pagine l'intera tradizione agostiniana del *vestigium*, l'eredità della mistica dionisiana, la logica dell'ascesa contemplativa e la teologia della luce che caratterizza la scuola francescana del XIII secolo.

La struttura dell'opera è architettonicamente precisissima. Bonaventura individua sei gradi dell'ascesa contemplativa, corrispondenti alle sei ali dello Serafino della visione di Isaia (6,2) che aveva ispirato la visione di Francesco sul Monte Verna. I sei gradi si organizzano in tre coppie, corrispondenti a tre diversi livelli di lettura delle tracce del divino: la lettura delle tracce nel mondo esterno (*per vestigia*), la lettura delle tracce nell'anima umana (*per imaginem*), e il superamento di ogni traccia nell'unione mistica diretta.

I primi due gradi — la coppia inferiore — corrispondono alla lettura delle tracce di Dio nel mondo sensibile: le creature corporee, considerate nella loro struttura e nella loro attività, mostrano i vestigia della sapienza, della potenza e della bontà divina. Bonaventura non si limita a ripetere la dottrina agostiniana: la elabora con una sofisticazione metafisica che incorpora la fisica aristotelica e la ottica medievale. Ogni creatura corporea ha tre caratteristiche fondamentali — il peso (*pondus*) che la orienta verso il suo fine, il numero (*numerus*) che le dà la sua struttura quantitativa interna, la misura (*mensura*) che la circoscrive rispetto alle altre cose — e queste tre caratteristiche sono vestigia della potenza, sapienza e bontà divine. Ma Bonaventura aggiunge una dimensione che Agostino aveva lasciato implicita: le creature non soltanto portano i vestigia del Creatore nella loro struttura interna, ma agiscono come specchi che riflettono la luce divina verso chi sa leggerle. Il mondo sensibile non è soltanto un archivio di tracce: è un testo da leggere, un libro scritto dal dito di Dio la cui lettura richiede un metodo e una disposizione del lettore.

X.5. La luce come traccia: la fisica medievale come epistemologia

Il secondo libro — il secondo grado dell'ascesa — approfondisce la lettura delle tracce del divino non nella struttura statica delle cose ma nel loro agire, e in particolare nel fenomeno della luce, che occupa un posto centrale nella fisica e nella metafisica medievale francescana. Roberto Grossatesta, maestro di Bonaventura alla scuola francescana di Oxford, aveva elaborato una *metafisica della luce* in cui la luce era il principio di ogni estensione corporea e il medium attraverso cui l'azione causale si propagava nell'universo. Ruggero Bacone, allievo di Grossatesta, aveva sviluppato questa intuizione in una teoria dell'ottica — la *perspectiva* — che analizzava la propagazione della luce come caso paradigmatico della teoria delle *species*, le forme che ogni agente emette e che si propagano nel medium circostante come tracce dell'agente.

La teoria delle *species* è, nella sua struttura epistemologica, una teoria della traccia. Ogni corpo emette continuamente *species* — forme della sua natura che si propagano in tutte le direzioni attraverso il medium — e queste species portano l'informazione sulla natura dell'emittente a chiunque le riceva. La visione è il caso paradigmatico: l'occhio riceve le species luminose emesse dagli oggetti visibili, e attraverso di esse conosce indirettamente gli oggetti stessi. La conoscenza sensoriale è interamente mediata da tracce — le species — che i corpi lasciano nel medium circostante; non vi è mai contatto diretto tra l'organo di senso e la cosa conosciuta.

Bonaventura incorpora questa fisica nell'itinerario contemplativo: le creature sensibili emettono species che raggiungono l'anima attraverso i sensi, e queste species sono vestigia della luce divina che si rifrange nel creato. La conoscenza sensibile, per Bonaventura, non è mai soltanto conoscenza delle cose: è sempre anche, per chi sa leggerla, conoscenza delle tracce del Creatore nelle cose. Il mondo fisico è un sistema di emissioni di species, e le species sono tracce: ciò che riceve l'occhio è la forma dell'oggetto visibile nel medium luminoso, e questa forma è a sua volta la traccia della sapienza che ha strutturato l'oggetto nella forma che ha.

X.6. Il vestigium come struttura relazionale: confronto con le versioni moderne

La dottrina medievale del *vestigium Dei* condivide con le versioni moderne della traccia — derridiana, peirceana, forense, icnologica — la struttura fondamentale che si è definita come *testimonianza indiretta*: il vestigium porta informazione sull'assente (il Creatore) attraverso la struttura del presente (la creatura), senza che l'assente sia presente nel presente. Il Creatore non è nella creatura come un componente è nell'aggregato: vi è come un pittore in un affresco — non come parte materiale ma come presenza strutturale che si legge nella forma del risultato.

Vi sono tuttavia differenze significative che impediscono di trattare la nozione medievale come semplice anticipazione delle versioni moderne.

La prima differenza riguarda la *direzione dell'inferenza*. La traccia moderna — icnologica, forense, derridiana — è il punto di partenza di un'inferenza che risale verso l'assente: la traccia è data, il produttore è da scoprire. Il *vestigium Dei* medievale ha una struttura inversa: il Creatore è già conosciuto per fede, e il vestigium è il luogo in cui questa conoscenza si arricchisce e si approfondisce attraverso la lettura delle creature. Non si tratta di un'inferenza verso Dio a partire dalle tracce: si tratta di una comprensione di Dio attraverso le sue tracce, per chi già crede. L'analogia con la criminalistica non è «trovare il criminale a partire dall'impronta» ma «capire meglio il criminale già noto attraverso le sue impronte». È una funzione ermeneutica, non inferenziale in senso stretto.

La seconda differenza riguarda la *necessità del nesso*. Nella traccia moderna, il nesso tra la traccia e il suo produttore è causale ma contingente: il criminale avrebbe potuto non passare per quella stanza, l'organismo avrebbe potuto non scavare quella galleria, l'evento avrebbe potuto non lasciare tracce in quel substrato. Nella dottrina del *vestigium Dei*, il nesso è necessario: ogni creatura porta necessariamente in sé il vestigium del Creatore, perché ogni creatura riceve il suo essere da Dio e questo ricevere si imprime necessariamente nella struttura dell'effetto. Non vi è creatura senza vestigium, così come non vi è sigillo nella cera senza l'impronta del sigillo. La necessità metafisica del nesso è la garanzia che il mondo sensibile è sempre e interamente leggibile come testo del Creatore.

La terza differenza, la più importante, riguarda la *struttura dell'assente*. Nelle versioni moderne della traccia, l'assente che la traccia documenta è un ente finito — un organismo, un individuo, un sistema fisico — la cui struttura è in linea di principio interamente conoscibile, anche se in pratica parzialmente accessibile. Nel *vestigium Dei*, l'assente è infinito e incomprensibile: Dio trascende qualsiasi concetto che le creature possano formarsene, e la traccia — per quanto fedele — non può mai portare un'informazione adeguata all'originale. La teologia negativa — la *via negativa* che nega di Dio ogni predicato positivo perché ogni predicato positivo è finito e Dio è infinito — è il complemento necessario della dottrina del vestigium: le tracce dicono qualcosa di Dio, ma non dicono tutto, e ciò che non dicono è più importante di ciò che dicono.

Questa struttura — una traccia che porta informazione reale ma inadeguata su un originale che la eccede strutturalmente — non è estranea alle versioni moderne. Il teorema di no-cloning stabilisce che la traccia fisica non può portare informazione completa sull'originale; la teoria di Derrida afferma che la traccia del significato non può mai restituire la pienezza del significato. La differenza è che nella teologia medievale questa inadeguatezza è necessaria per ragioni metafisiche — l'infinità di Dio — mentre nelle versioni moderne è necessaria per ragioni fisiche o logiche — il secondo principio della termodinamica, la linearità dell'algebra. Ma la struttura epistemologica è analoga: una traccia che porta informazione reale su un assente che non può essere pienamente restituito dalla traccia stessa.

X.7. Il *vestigium* e l'ecologia della lettura

C'è un ultimo aspetto della dottrina medievale del *vestigium* che merita di essere sottolineato, perché illumina un aspetto della struttura della traccia che le versioni moderne tendono a trascurare: l'importanza della *disposizione del lettore*. Bonaventura insiste con forza che le tracce del divino nel mondo sensibile non si leggono automaticamente: richiedono una certa preparazione dell'anima, una certa purezza dell'intenzione, una certa capacità contemplativa che deve essere coltivata attraverso la pratica ascetica e la preghiera. Chi guarda il cielo stellato con occhi abituati all'avidità o alla distrazione non vede le tracce della sapienza divina: vede stelle. Chi lo guarda con occhi purificati le vede come vestigia di un'intelligenza ordinatrice.

Questa insistenza sulla disposizione del lettore non è irrazionalismo né soggettivismo: è la tematizzazione esplicita di qualcosa che il presente saggio ha più volte incontrato sotto nomi diversi. Il cerchio ermeneutico della traccia — la necessità di una teoria del meccanismo produttivo per interpretare la traccia — è, nella versione medievale, la necessità di una formazione contemplativa che disponga l'anima alla lettura dei vestigia. Il paradigma indiziario di Peirce e Ginzburg — la capacità abduttiva dell'esperto che sa leggere tracce che per il profano sono invisibili — è, nella versione medievale, la virtù contemplativa che rende visibili le tracce divine. In entrambi i casi, la traccia non è un dato bruto che si impone all'osservatore qualunque: è un testo che richiede un lettore competente, formato, disposto. La traccia è leggibile solo per chi ha imparato a leggerla.

XI. La Traccia in Teoria delle Categorie e nelle Teorie Topologiche dei Campi Quantistici

XI.1. L'astrazione come chiarificazione

La teoria delle categorie — fondata da Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane nel 1945 nell'articolo «General Theory of Natural Equivalences» — è la matematica dell'astrazione portata al suo grado più alto: essa studia non gli oggetti matematici in sé ma le strutture delle loro relazioni, non le proprietà interne di insiemi, spazi o gruppi ma le mappe che li connettono e i pattern che queste mappe formano. Dal punto di vista della teoria delle categorie, la matematica si occupa di *morfismi* — frecce tra oggetti — e le proprietà degli oggetti si leggono interamente attraverso le frecce che entrano e escono da loro. Questo spostamento dal contenuto alla struttura relazionale è, per usare un'immagine che il saggio ha già impiegato, un'operazione di estrazione della traccia: si elimina il particolare per conservare lo strutturale, si astrae il residuo invariante sotto tutte le possibili rappresentazioni concrete.

In questo contesto, la nozione di *traccia categoriale* — una generalizzazione del funzionale tr della algebra lineare a un quadro categoriale molto più ampio — è di particolare interesse, perché essa permette di parlare di traccia in contesti dove non esiste alcuno spazio vettoriale, alcuna matrice, alcuna nozione di somma degli elementi

diagonali. La traccia categoriale è la forma più astratta e più generale del concetto, quella che rivela la struttura minima necessaria affinché la nozione abbia senso.

XI.2. Categorie monoidali e struttura di dualità

Per introdurre la traccia categoriale è necessario precisare il contesto in cui essa vive: le *categorie monoidali*, e in particolare le categorie monoidali *compatte* o *rigide*. Una categoria monoidale $(\mathscr{C}, \otimes, I)$ è una categoria dotata di un funtore bifuntoriale $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — il prodotto tensore — e di un oggetto unità I, con isomorfismi naturali che esprimono l'associatività e l'unitarietà di $\otimes$ fino a isomorfismo, soddisfacenti le condizioni di coerenza di MacLane. Si pensi alla categoria Vect_k dei spazi vettoriali su un campo k con il prodotto tensore $\otimes_k$ e il campo k come unità: questa è la categoria monoidale paradigmatica.

Una categoria monoidale si dice *compatta* (o *rigida*, o *autonoma*) se ogni oggetto A possiede un *duale* A* — un oggetto che sta ad A come lo spazio vettoriale duale $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ sta allo spazio V — con morfismi di *unità* $\eta_A : I \to A^* \otimes A$ e *counità* $\varepsilon_A : A \otimes A^* \to I$ che soddisfano le equazioni dello zig-zag:

$$(\varepsilon_A \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta_A) = \mathrm{id}_A$$

$$(\mathrm{id}_{A^*} \otimes \varepsilon_A) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{id}_{A^*}) = \mathrm{id}_{A^*}$$

Nella categoria Vect_k dei spazi vettoriali di dimensione finita, il duale è lo spazio duale ordinario, l'unità $\eta_V : k \to V^* \otimes V$ manda 1 nella somma $\Sigma_i\, e_i^* \otimes e_i$ (dove $\{e_i\}$ è una base di V e $\{e_i^*\}$ la base duale), e la counità $\varepsilon_V : V \otimes V^* \to k$ è data dalla valutazione $\varepsilon_V(v \otimes f) = f(v)$. Le equazioni dello zig-zag esprimono le identità fondamentali della dualità finito-dimensionale.

XI.3. La traccia categoriale: definizione

In una categoria monoidale compatta, la *traccia* di un endomorfismo $f : A \to A$ è il morfismo

$$\mathrm{tr}(f) : I \to I$$

definito dalla composizione:

$$I \to^{\eta_A} A^* \otimes A \to^{\mathrm{id}_{A^*} \otimes f} A^* \otimes A \to^{\varepsilon_A} I$$

oppure equivalentemente, usando la dualità:

$$I \to^{\eta_A} A^* \otimes A \to^{\sigma} A \otimes A^* \to^{f \otimes id_{A^*}} A \otimes A^* \to^{\varepsilon_A} I$$

(dove $\sigma : A^* \otimes A \to A \otimes A^*$ è il morfismo di simmetria, disponibile nelle categorie monoidali simmetriche). Poiché gli endomorfismi di I formano un monoide commutativo — l'insieme Hom(I, I) con la composizione — la traccia categoriale produce un elemento di questo monoide. Nella categoria Vect_k, $\mathrm{Hom}(k, k) \cong k$, e la traccia categoriale di un endomorfismo lineare $f : V \to V$ si riduce esattamente al funzionale $\mathrm{tr}(f) = \Sigma_i\, e_i^*(f(e_i)) = \Sigma_i\, (f)_{ii}$ — la traccia ordinaria della matrice che rappresenta f. La traccia categoriale è dunque una generalizzazione autentica: si riduce alla traccia usuale nel caso standard, e si estende a contesti molto più generali.

Le proprietà fondamentali della traccia ordinaria — la ciclicità e l'invarianza — si generalizzano in modo preciso. La ciclicità diventa, nel linguaggio categoriale, la proprietà di *naturalezza*: per endomorfismi $f : A \to A$ e $g : B \to B$ e morfismi $h : A \to B$,

$\mathrm{tr}(h \circ f) = \mathrm{tr}(g \circ h)$ quando $f = h \circ g \circ h^{-1}$ (se h è invertibile)

e più in generale la traccia soddisfa la cosiddetta *proprietà di sliding* che permette di far scorrere morfismi attorno al «nodo» che la definisce. L'invarianza sotto coniugazione è il caso speciale in cui il morfismo h è un isomorfismo.

XI.4. Il calcolo dei diagrammi e la visualizzazione della traccia

Uno degli strumenti più potenti della teoria delle categorie monoidali è il *calcolo dei diagrammi di stringhe* (string diagram calculus), sviluppato da Roger Penrose negli anni Settanta e sistematizzato da Peter Selinger e altri. In questo calcolo, gli oggetti sono rappresentati da fili verticali, i morfismi da nodi attraverso cui i fili passano, il prodotto tensore dalla giustapposizione orizzontale dei fili, la composizione dall'impilamento verticale.

La traccia categoriale ha una rappresentazione di estrema eleganza in questo linguaggio. Un endomorfismo $f : A \to A$ è rappresentato da un nodo con un filo che entra dall'alto (l'ingresso A) e un filo che esce in basso (l'uscita A). La traccia tr(f) è rappresentata collegando il filo d'ingresso al filo d'uscita con un arco — si forma un anello, un loop chiuso. Il morfismo risultante non ha fili in ingresso né in uscita: è un elemento di Hom(I, I), uno scalare.

Questa visualizzazione rende immediatamente intuitiva la proprietà di ciclicità: se si ha il loop di $f \circ g$, si può deformare continuamente il diagramma — come se i fili fossero fili fisici flessibili — per ottenere il loop di $g \circ f$, poiché le due configurazioni sono topologicamente equivalenti. La traccia è invariante sotto deformazioni topologiche

continue del diagramma; questa è la forma categoriale dell'invarianza sotto coniugazione.

Il calcolo dei diagrammi di stringhe è, in questa prospettiva, la forma geometrica della teoria della traccia: la traccia di un operatore è visivamente la chiusura del filo che lo attraversa, il collegamento dell'uscita all'ingresso per formare un loop. La traccia è, letteralmente, il segno che rimane quando l'operatore non ha né ingresso né uscita: quando si chiude su se stesso.

XI.5. Le TQFT e la traccia come invariante topologico

Il campo in cui la traccia categoriale ha le sue applicazioni più profonde e più sorprendenti è la *teoria topologica dei campi quantistici* (Topological Quantum Field Theory, TQFT), il programma matematico fondato da Edward Witten e formalizzato assiomaticamente da Michael Atiyah nel 1988. Le TQFT sono teorie fisiche — o strutture matematiche ispirate dalla fisica quantistica — i cui osservabili dipendono soltanto dalla topologia dello spazio-tempo su cui sono definite, non dalla sua geometria locale: esse sono invarianti sotto deformazioni continue dello spazio-tempo che ne preservano la topologia ma ne modificano le distanze e le curvature.

Gli assiomi di Atiyah per una TQFT in dimensione n+1 definiscono un funtore simmetrico monoidale

$$Z : \mathrm{nCob} \to \mathrm{Vect}_k$$

dalla categoria dei *cobordismi* n-dimensionali alla categoria dei spazi vettoriali. La categoria nCob ha come oggetti le varietà chiuse orientate di dimensione n — le possibili «sezioni spaziali» dello spazio-tempo — e come morfismi i *cobordismi* tra di esse: varietà compatte orientate di dimensione n+1 con bordo la somma disgiunta della varietà di dominio e del duale della varietà di codominio. Il prodotto monoidale è la somma disgiunta. Il funtore Z assegna a ogni varietà n-dimensionale Σ uno spazio vettoriale $Z(\Sigma)$ — lo spazio degli stati quantistici sulla «fetta spaziale» Σ — e a ogni cobordismo $M : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ un'applicazione lineare $Z(M) : Z(\Sigma_1) \to Z(\Sigma_2)$.

La traccia entra in questo contesto in modo essenziale attraverso il concetto di *chiusura*. Dato un cobordismo $M : \Sigma \to \Sigma$ — un endomorfismo nella categoria nCob — la sua *chiusura* $\hat{M}$ è il cobordismo chiuso (senza bordo) ottenuto incollando i due bordi di M tra loro. Questa operazione è la traccia categoriale nella categoria nCob: è il morfismo $\mathrm{nCob} \to I$ ottenuto componendo con le unità e counità della struttura compatta. Il funtore Z, essendo simmetrico monoidale, commuta con la traccia: $Z(\hat{M}) = \mathrm{tr}(Z(M))$, dove il lato destro è la traccia ordinaria dell'applicazione lineare $Z(M) : Z(\Sigma) \to Z(\Sigma)$.

XI.6. La funzione di partizione e gli invarianti dei nodi

La conseguenza più importante di questa struttura è che la funzione di partizione di una TQFT su una varietà chiusa M — il numero $Z(M) \in k$ — è un invariante topologico di M: non cambia sotto deformazioni continue che preservano la topologia. E questo invariante è calcolato esattamente come una traccia: $Z(M) = \mathrm{tr}(Z(M_0))$ dove M_0 è qualsiasi cobordismo di cui M è la chiusura.

Nel caso tridimensionale — le TQFT di dimensione 2+1 — questo programma produce invarianti dei *nodi* e dei *links* nella sfera tridimensionale S^3. Un nodo è una curva chiusa embedded in S^3; la sua classe di equivalenza sotto deformazioni continue (isotopie ambiente) è un invariante topologico. La TQFT di Witten-Reshetikhin-Turaev, associata all'algebra quantistica di un gruppo di Lie semisemplice (tipicamente SU(2) o SU(N)), assegna a ogni nodo K in S^3 un polinomio di Laurent in una variabile formale q — un *invariante polinomiale* del nodo — che è calcolato esattamente come la traccia di una certa applicazione lineare associata al nodo.

Il *polinomio di Jones* di un nodo K, scoperto da Vaughan Jones nel 1984 mediante un approccio algebrico prima della sua reinterpretazione TQFT, è l'invariante più celebre di questa famiglia. Esso si ottiene come la traccia di Markov di una rappresentazione del gruppo di trecce associata al nodo: se K è la chiusura di una treccia β nel gruppo di trecce B_n, allora il polinomio di Jones è

$$V_K(t) = ((-1)^{n-1} \cdot t^{(n-e)/4}) \cdot \mathrm{tr}_{\mathrm{Markov}}(\varrho(\beta))$$

dove ϱ è la rappresentazione di Temperley-Lieb e $\mathrm{tr}_{\mathrm{Markov}}$ è la *traccia di Markov* — una forma lineare sull'algebra del gruppo di trecce che soddisfa le proprietà di ciclicità e di stabilizzazione necessarie per rendere il valore indipendente dal rappresentante β della classe del nodo K. La traccia è il meccanismo che rende l'invariante indipendente dalle scelte intermedie: come la traccia matriciale ordinaria è indipendente dalla scelta della base, la traccia di Markov è indipendente dalla scelta del rappresentante nel gruppo di trecce.

XI.7. La struttura epistemologica: traccia come invariante topologico

La connessione tra la traccia matematica nel senso del capitolo I e la traccia topologica nel senso delle TQFT illumina la struttura più profonda del concetto. In entrambi i casi, la traccia è il *residuo invariante* sotto un gruppo di trasformazioni: invariante sotto cambi di base per il funzionale tr matriciale, invariante sotto isotopie ambiente per gli invarianti dei nodi. In entrambi i casi, questo residuo invariante porta informazione

sull'oggetto — la distribuzione degli autovalori per la traccia matriciale, la topologia del nodo per il polinomio di Jones — senza determinarlo completamente: matrici diverse possono avere la stessa traccia, nodi diversi possono avere lo stesso polinomio di Jones.

Questa struttura parallela non è coincidenza: essa riflette il fatto che la traccia categoriale è il meccanismo formale che in entrambi i casi sottostà alla costruzione dell'invariante. La traccia matriciale è la traccia categoriale nella categoria Vect_k delle spazi vettoriali finito-dimensionali; il polinomio di Jones è la traccia categoriale nella categoria delle rappresentazioni dell'algebra quantistica $U_q(sl_2)$. La categoria varia — da Vect_k alla categoria di rappresentazioni di un'algebra quantistica — ma la struttura categoriale che produce la traccia è la stessa: chiudere un endomorfismo su se stesso, collegare uscita a ingresso, formare un loop.

La traccia è dunque, in questa prospettiva, il meccanismo universale di costruzione degli invarianti: qualsiasi struttura che ammette una chiusura — qualsiasi endomorfismo in una categoria con struttura di dualità — ammette una traccia, e questa traccia produce un invariante sotto le trasformazioni che preservano la struttura categoriale. La generalità di questo meccanismo è straordinaria: esso produce la traccia matriciale, gli invarianti dei nodi, la funzione di partizione delle teorie di campo topologiche, e — attraverso la formula della traccia di Selberg — la connessione tra lo spettro del laplaciano e le geodetiche chiuse di una superficie iperbolica. Tutti questi risultati sono istanze della stessa struttura categoriale.

XI.8. La traccia come chiusura: un'ontologia del loop

Vi è nella definizione categoriale della traccia un'immagine geometrica di grande potenza, che vale la pena di esplicitare perché essa illumina la struttura della nozione al di là del suo contenuto tecnico specifico. La traccia di un endomorfismo è la sua *chiusura*: il morfismo che si ottiene quando l'uscita viene collegata all'ingresso, quando il processo si ripiega su se stesso e forma un loop. La traccia è ciò che rimane quando un processo chiude il suo circolo.

Questa immagine risuona con tutti gli altri usi del termine «traccia» che il saggio ha esaminato. La traccia derridiana è la chiusura del segno su se stesso nella catena dei rimandi: ogni segno rimanda ad altri segni che rimandano al primo, formando loops di differimento che non si stabilizzano mai in una presenza. La traccia della memoria freudiana è il solco che un percorso neuronale lascia nel substrato rendendo più probabile il suo stesso ripercorrimento: è un loop fisico, una facilitazione che tende a riprodurre il percorso che l'ha prodotta. La traccia topologica — il nodo, la geodesica chiusa, il punto fisso — è letteralmente un loop geometrico: una curva che ritorna al punto di partenza. La traccia forense è il loop del contatto: il criminale è passato per la scena, e il suo passaggio ha lasciato un'impronta che documenta il passaggio.

La struttura del loop — il ritorno al punto di partenza, la chiusura del circolo, l'autorimando — non è decorativa. Essa è la forma attraverso cui un processo lascia traccia di sé: qualsiasi processo che non forma loop non lascia traccia, perché una traccia è esattamente un effetto che rimanda alla sua causa, un presente che riporta all'assente che lo ha prodotto. La traccia è il loop temporale che connette il passato al presente attraverso la persistenza di un residuo strutturale.

Il funzionale traccia — nella sua versione matriciale, categoriale, spettrale, topologica — è la quantificazione formale di questo loop: esso misura quanto il processo ritorna su se stesso, quanto del punto di partenza è ancora presente nel punto di arrivo. tr(A) = 0 quando A non ha nessun punto fisso nel suo dominio di azione (inteso in senso spettrale: nessun autovalore diverso da zero); tr(A) = n quando A è l'identità e ritorna completamente su se stesso. La traccia è la misura dell'autorimando, la quantificazione del loop.

Questa struttura circolare — il loop come forma elementare della traccia — è forse il contributo più originale che la teoria delle categorie porta all'epistemologia generale elaborata in questo saggio. Nei capitoli precedenti si era definita la traccia come residuo invariante dell'assente nel presente. La formulazione categoriale precisa questa definizione: la traccia è il residuo che un processo lascia di sé quando si chiude su se stesso, quando il suo percorso forma un loop che può essere poi «letto» da un osservatore esterno. La traccia è la firma del loop.

Appendici Tecniche

Appendice A — Il Funzionale Traccia: Derivazioni Complete

A.1. Ciclicità della traccia: dimostrazione dettagliata

Siano $A \in M_{m\times n}(K)$ e $B \in M_{n\times m}(K)$, cosicché $AB \in M_m(K)$ e $BA \in M_n(K)$ siano entrambi quadrati. Si vuole dimostrare che $tr(AB) = tr(BA)$.

Per definizione del prodotto matriciale:

$$(AB)_{ii} = \Sigma_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

La traccia di AB è:

$$tr(AB) = \Sigma_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

Poiché i coefficienti A_{ij} e B_{ji} sono scalari nel campo K, essi commutano, e la doppia somma finita è riarrangiabile liberamente:

$$\Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} = \Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij}$$

Riconoscendo il prodotto matriciale $(BA)_{jj} = \Sigma_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij}$:

$$\Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} = \Sigma_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA)$$

Dunque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. ∎

La ciclicità si estende a prodotti multipli: $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$, ma in generale $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$. La traccia è invariante sotto permutazioni cicliche, non sotto permutazioni arbitrarie.

A.2. Relazioni di Newton tra somme di potenze e polinomio caratteristico

Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (contati con molteplicità). Definiamo le *somme di Newton*:

$$S_k = \mathrm{tr}(A^k) = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

e le *funzioni simmetriche elementari*:

$$e_0 = 1$$
$$e_1 = \Sigma_i \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$$
$$e_2 = \Sigma_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$
$$\vdots$$
$$e_k = \Sigma_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$$
$$\vdots$$
$$e_n = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det(A)$$

Il polinomio caratteristico si scrive come:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k e_k \lambda^{n-k}$$
$$= \lambda^n - e_1 \lambda^{n-1} + e_2 \lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n e_n$$

Le *identità di Newton* esprimono le e_k in funzione delle S_k. Per $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1} e_{k-1} S_1 + (-1)^k k e_k = 0$$

Da cui si ricava e_k a partire da S_1, …, S_k. Le prime quattro relazioni esplicite sono:

k = 1: S_1 - e_1 = 0 $\Longrightarrow$ e_1 = S_1 = tr(A)

k = 2: S_2 - e_1 S_1 + 2e_2 = 0 $\Longrightarrow$ e_2 = (e_1 S_1 - S_2)/2 = (S_1^2 - S_2)/2

k = 3: S_3 - e_1 S_2 + e_2 S_1 - 3e_3 = 0
$\Longrightarrow$ e_3 = (S_3 - e_1 S_2 + e_2 S_1)/3

k = 4: S_4 - e_1 S_3 + e_2 S_2 - e_3 S_1 + 4e_4 = 0
$\Longrightarrow$ e_4 = (- S_4 + e_1 S_3 - e_2 S_2 + e_3 S_1)/4

Per k > n, la relazione diventa:

S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - … + (-1)^n e_n S_{k-n} = 0

che è una relazione di ricorrenza lineare per le S_k, con coefficienti dati dagli e_j già determinati.

La dimostrazione delle identità di Newton si ottiene derivando logaritmicamente la funzione generatrice del polinomio caratteristico. Si consideri la funzione:

P(t) = Π_{i=1}^{n} (1 - λ_i t) = Σ_{k=0}^{n} (-1)^k e_k t^k

La sua derivata logaritmica è:

P'(t)/P(t) = Σ_{i=1}^{n} (-λ_i)/(1 - λ_i t) = -Σ_{i=1}^{n} Σ_{k=0}^{∞} λ_i^{k+1} t^k
= -Σ_{k=0}^{∞} S_{k+1} t^k

D'altra parte, da P(t) = Σ (-1)^k e_k t^k si ricava P'(t) = Σ_{k=1}^{n} (-1)^k k e_k t^{k-1}. L'identità P'(t) = P(t) · (P'(t)/P(t)) produce, confrontando i coefficienti di t^{k-1}, le identità di Newton. ∎

A.3. Operatori trace-class: proprietà fondamentali

Sia $\mathbb{H}$ un spazio di Hilbert separabile con base ortonormale {e_i}_{i∈ℕ}. Sia T : $\mathbb{H}$ → $\mathbb{H}$ un operatore lineare limitato. Il suo *valore assoluto* è l'operatore autoaggiunto semidefinito positivo |T| = (T*T)^{1/2}, dove la radice quadrata è definita attraverso il calcolo funzionale per operatori autoaggiunti limitati. I *valori singolari* s_k(T) sono gli autovalori di |T|, ordinati in modo non crescente: s_1(T) ≥ s_2(T) ≥ … ≥ 0.

Definizione. T ∈ $\mathscr{S}$_1($\mathbb{H}$) (classe trace) se e solo se ‖T‖_1 = Σ_k s_k(T) < ∞.

Proposizione (indipendenza dalla base). Se $T \in \mathscr{S}_1(\mathbb{H})$, allora la serie $\sum_i \langle Te_i, e_i\rangle$ converge assolutamente per ogni base ortonormale $\{e_i\}$, e il suo valore è lo stesso per tutte le basi.

Dimostrazione. Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale e sia $T = U|T|$ la decomposizione polare di T (U isometria parziale). Allora:

$$\sum_i |\langle Te_i, e_i\rangle| = \sum_i |\langle U|T|e_i, e_i\rangle| = \sum_i |\langle |T|^{1/2} e_i, U^* e_i\rangle|$$

Per Cauchy-Schwarz:

$$\leq \sum_i \| |T|^{1/2} e_i\| \cdot \|U^* e_i\| \leq \left(\sum_i \| |T|^{1/2} e_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_i \|U^* e_i\|^2\right)^{1/2}$$

Il primo fattore è $(\sum_i \langle |T| e_i, e_i\rangle)^{1/2} = \|T\|_1^{1/2}$, che è finito per ipotesi. Il secondo fattore è $\leq \|U^*\| \cdot (\sum_i \|e_i\|^2)^{1/2} = \|U^*\| \cdot \dim^{1/2}(\mathbb{H})$; ma per $\mathbb{H}$ infinito-dimensionale l'argomento richiede un trattamento più sottile usando la struttura di $\mathscr{S}_2$. L'indipendenza dalla base segue da calcolo diretto: se $\{f_j\}$ è un'altra base ortonormale, allora $\sum_i \langle Te_i, e_i\rangle = \sum_i \sum_j \langle Te_i, f_j\rangle\langle f_j, e_i\rangle = \sum_j \sum_i \langle f_j, e_i\rangle\langle Te_i, f_j\rangle = \sum_j \langle Tf_j, f_j\rangle$, dove gli scambi di sommatoria sono giustificati dalla convergenza assoluta. ∎

A.4. L'operatore densità e la formula del valor medio

In meccanica quantistica, lo stato di un sistema è descritto da un operatore densità $\rho \in \mathscr{S}_1(\mathbb{H})$ con le proprietà:

(i) $\rho^* = \rho$ (autoaggiunto)
(ii) $\langle \psi, \rho\psi\rangle \geq 0$ per ogni $\psi \in \mathbb{H}$ (semidefinito positivo)
(iii) $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ (normalizzazione)

Per uno stato puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $|\psi\rangle$ normalizzato, si verifica:

$$\mathrm{tr}(\rho) = \sum_i \langle e_i, |\psi\rangle\langle\psi|e_i\rangle = \sum_i \langle e_i, \psi\rangle\langle\psi, e_i\rangle = \sum_i |\langle e_i, \psi\rangle|^2 = \|\psi\|^2 = 1 \;\checkmark$$

Il valor medio dell'osservabile O (operatore autoaggiunto con decomposizione spettrale $O = \sum_k o_k |k\rangle\langle k|$, dove $\{|k\rangle\}$ sono gli autovettori normalizzati con $Oe_k = o_k e_k$) è:

$$\langle O\rangle_\rho = \mathrm{tr}(\rho O)$$

Dimostrazione per stati puri. Sia $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$\mathrm{tr}(\varrho O) = \Sigma_k \langle k|\varrho O|k\rangle = \Sigma_k \langle k|\psi\rangle\langle\psi|O|k\rangle = \Sigma_k \langle k|\psi\rangle\, o_k \langle\psi|k\rangle = \Sigma_k\, o_k\, |\langle k|\psi\rangle|^2$

che è la media dei valori propri o_k pesati con le probabilità $P(o_k) = |\langle k|\psi\rangle|^2$ della regola di Born. ∎

Estensione agli stati misti. Per $\varrho = \Sigma_\alpha\, p_\alpha\, |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ con $p_\alpha \geq 0$ e $\Sigma_\alpha\, p_\alpha = 1$:

$\mathrm{tr}(\varrho O) = \Sigma_\alpha\, p_\alpha\, \mathrm{tr}(|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|O) = \Sigma_\alpha\, p_\alpha\, \langle O\rangle_{|\psi_\alpha\rangle}$

che è la media classica delle medie quantistiche sugli stati puri componenti. ∎

A.5. L'entropia di von Neumann

L'*entropia di von Neumann* dello stato ϱ è:

$S(\varrho) = -\mathrm{tr}(\varrho \log \varrho)$

dove il logaritmo è definito attraverso il calcolo funzionale: se ϱ ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (positivi, con $\Sigma\, \lambda_k = 1$), allora

$S(\varrho) = -\Sigma_k\, \lambda_k \log \lambda_k$

con la convenzione $0 \log 0 = 0$. Le proprietà fondamentali dell'entropia di von Neumann sono:

(a) $S(\varrho) \geq 0$, con uguaglianza se e solo se ϱ è uno stato puro (un solo autovalore non nullo, uguale a 1).

(b) $S(\varrho) \leq \log(\dim \mathbb{H})$, con uguaglianza se e solo se $\varrho = I/\dim \mathbb{H}$ (stato massimamente misto).

(c) *Subadditivà*: per un sistema bipartito ϱ_{AB} su $\mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$, vale
$S(\varrho_{AB}) \leq S(\varrho_A) + S(\varrho_B)$
dove $\varrho_A = \mathrm{tr}_B(\varrho_{AB})$ e $\varrho_B = \mathrm{tr}_A(\varrho_{AB})$.

(d) *Subadditivà forte* (Lieb e Ruskai, 1973): per un sistema tripartito ϱ_{ABC},
$S(\varrho_{ABC}) + S(\varrho_B) \leq S(\varrho_{AB}) + S(\varrho_{BC})$

La subadditività forte è uno dei risultati più profondi della teoria dell'informazione quantistica e ha conseguenze dirette per la teoria della decoerenza e dell'entanglement.

Appendice B — Il Teorema di No-Cloning: Dimostrazione Completa

Teorema (Wootters-Zurek, 1982). Non esiste alcun operatore unitario U su $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ (dove $\mathbb{H}$ ha dimensione ≥ 2) e alcuno stato ausiliario $|0\rangle \in \mathbb{H}$ tali che

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

per tutti gli stati normalizzati $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che tale U esista. Siano $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ due stati normalizzati arbitrari in $\mathbb{H}$. Per ipotesi:

$$U(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \qquad \text{(B.1)}$$
$$U(|\varphi\rangle \otimes |0\rangle) = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle \qquad \text{(B.2)}$$

Calcoliamo il prodotto interno tra i vettori nelle equazioni (B.1) e (B.2). Il lato sinistro è:

$$\langle\psi|U^\dagger) \cdot (U|\varphi\rangle) \otimes (\langle 0|0\rangle) = \langle\psi|\varphi\rangle \cdot 1 = \langle\psi|\varphi\rangle$$

dove si è usato il fatto che U è unitario ($U^\dagger U = I$), quindi conserva il prodotto interno, e che $\langle 0|0\rangle = 1$. Il prodotto interno del lato destro è:

$$(\langle\psi| \otimes \langle\psi|)(|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = \langle\psi|\varphi\rangle \cdot \langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^2$$

Poiché U conserva il prodotto interno, i due valori devono coincidere:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^2 \qquad \text{(B.3)}$$

L'equazione (B.3) deve valere per tutti i vettori normalizzati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$. Essa è soddisfatta se e solo se $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ (ortogonalità) oppure $\langle\psi|\varphi\rangle = 1$ (identità, cioè $|\psi\rangle = e^{i\theta}|\varphi\rangle$ per qualche fase θ). Poiché $\mathbb{H}$ ha dimensione ≥ 2, esistono stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ con $\langle\psi|\varphi\rangle$ diverso sia da 0 che da 1 — ad esempio, prendendo $|\psi\rangle = |0\rangle$ e $|\varphi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ si ottiene $\langle\psi|\varphi\rangle = 1/\sqrt{2}$, che non soddisfa (B.3). Contraddizione. ∎

Osservazione. Il teorema di no-cloning non implica che sia impossibile misurare lo stato di un sistema (la misura fornisce informazione parziale sullo stato) né che sia impossibile trasmettere informazione quantistica (la teleportazione quantistica è possibile, ma richiede l'uso di un canale classico ausiliario e comporta la distruzione dello stato originale). Esso afferma che non è possibile duplicare l'informazione quantistica completa di uno stato arbitrario sconosciuto.

Appendice C — La Formula della Traccia di Selberg: Struttura Formale

Sia $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sottogruppo discreto cocompatto senza torsione, e sia $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ la superficie di Riemann compatta di curvatura -1 associata. Il laplaciano iperbolico su $\mathbb{H}^2$ è:

$$\Delta_{\mathbb{H}^2} = -y^2 \left(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\right)$$

i cui autovalori su $L^2(M) = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ formano una sequenza discreta:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Si pone $\lambda_n = 1/4 + r_n^2$ con $r_n \geq 0$ per $\lambda_n \geq 1/4$. Per $\lambda_n < 1/4$ (autovalori eccezionali, per cui la superficie è sufficientemente «iperbolica» da non ammettere $\lambda < 1/4$ per argomenti di area — il teorema di Buser fornisce la stima $\lambda_1 \geq (4\pi^2/\mathrm{Area}(M)^2)$ — si pone $r_n = it_n$ con $t_n \in (0, 1/2)$. Per le superfici compatte di genere $g \geq 2$ senza autovalori eccezionali, tutti gli r_n sono reali non negativi.

Classi di coniugio iperboliche. Un elemento $\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ è *iperbolico* se $|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$. La lunghezza della geodetica chiusa corrispondente alla classe di coniugio $[\gamma]$ in Γ è

$$l(\gamma) = 2\log\left(\left(|\mathrm{tr}(\gamma)| + \sqrt{(\mathrm{tr}(\gamma)^2-4)}\right)/2\right) = 2\,\mathrm{arccosh}\left(|\mathrm{tr}(\gamma)|/2\right)$$

Un elemento iperbolico γ è *primitivo* se non è potenza di alcun altro elemento iperbolico in Γ. Ogni classe di coniugio iperbolica si scrive univocamente come $[\gamma_0^m]$ con γ_0 primitivo e $m \geq 1$.

Enunciato. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione che soddisfa: (i) h è pari: $h(-r) = h(r)$; (ii) h è analitica nella striscia $|\mathrm{Im}(z)| \leq 1/2 + \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$; (iii) $|h(z)| = O((1 + |z|^2)^{-1-\delta})$ per $|\mathrm{Re}(z)| \to \infty$, per qualche $\delta > 0$.

Sia $\hat{h}$ la trasformata di Fourier di h: $\hat{h}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\, e^{iru}\, dr$.

Allora vale l'identità

$$\sum_n h(r_n) = (\mathrm{Area}(M)/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} r\, h(r) \tanh(\pi r)\, dr + \sum_{[\gamma_0] \text{ primitivo}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(l(\gamma_0) / \left(2\sinh(m\, l(\gamma_0)/2)\right)\right) \hat{h}(m\, l(\gamma_0))$$

Il lato sinistro somma h sui «momenti spettrali» r_n; il lato destro contiene il termine continuo (integrale su tutto $\mathbb{R}$ con peso $\tanh(\pi r)$, che codifica la densità spettrale della

parte continua del laplaciano iperbolico su $\mathbb{H}^2$) e la somma discreta sulle geodetiche chiuse primitive e le loro iterate.

Applicazione: funzione zeta di Selberg. Si definisce la *funzione zeta di Selberg* come

$$Z_\Gamma(s) = \Pi_{[\gamma_0]} \Pi_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)l(\gamma_0)})$$

per $\mathrm{Re}(s) > 1$, con il prodotto esteso sulle classi di coniugio primitive. La funzione $Z_\Gamma(s)$ si prolunga a una funzione intera su $\mathbb{C}$ con zeri a $s = 1/2 \pm ir_n$ (autovalori del laplaciano) e a $s = -k$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$ (zeri banali). La formula della traccia di Selberg è equivalente — per scelta opportuna di h — all'equazione funzionale di $Z_\Gamma(s)$, in piena analogia strutturale con la formula esplicita di Riemann per la funzione zeta.

Appendice D — Abduzione e Probabilità: Il Rapporto di Verosimiglianza

La struttura formale dell'inferenza abduttiva può essere precisata in termini bayesiani attraverso il *rapporto di verosimiglianza* (likelihood ratio). Siano H e $\neg H$ due ipotesi mutuamente esclusive ed esaustive, e sia E un'evidenza osservata. Il teorema di Bayes afferma:

$$P(H|E) / P(\neg H|E) = (P(E|H) / P(E|\neg H)) \cdot (P(H) / P(\neg H))$$

Il fattore $(P(E|H) / P(E|\neg H))$ è il *rapporto di verosimiglianza* (likelihood ratio, LR): esso misura quanto l'evidenza E è più probabile sotto H rispetto a $\neg H$. Un $LR > 1$ indica che E supporta H rispetto a $\neg H$; un $LR < 1$ indica il contrario.

La *forza dell'evidenza* è spesso espressa in *ban* (unità logaritmiche introdotte da Turing e Good):

$$W(E; H) = \log_{10}(LR) = \log_{10}(P(E|H)) - \log_{10}(P(E|\neg H))$$

Nella analisi forense del DNA, se il profilo del locus genetico X ha frequenza p nella popolazione, allora:

$P(E \mid H_p$: la traccia appartiene all'imputato$) = 1$ (assumendo analisi corretta)
$P(E \mid H_d$: la traccia appartiene a un individuo casuale$) = p$

Il likelihood ratio è LR = 1/p. Se p = 10^{-8} (un profilo in un miliardo di individui), allora LR = 10^8 e W = 8 ban. Il rapporto delle probabilità a posteriori è 10^8 volte il rapporto delle probabilità a priori.

Il *prosecutor's fallacy* consiste nell'identificare P(E|¬H) con P(¬H|E): si afferma che, poiché la probabilità di osservare il profilo del DNA in un individuo casuale è p = 10^{-8}, la probabilità che l'imputato sia innocente è 10^{-8}. Questa identificazione è formalmente scorretta: P(¬H|E) = P(E|¬H) · P(¬H) / P(E), e il valore di P(¬H) — la probabilità a priori che l'imputato sia innocente — non è determinato dall'analisi del DNA ma dalle circostanze investigative. Se l'imputato è stato selezionato da un database di milioni di persone (un caso di *database trawling*), P(¬H) prima dell'esame del DNA è molto alta, e P(¬H|E) rimane significativa nonostante l'LR elevato.

La *defence attorney's fallacy* è l'errore opposto: presentare il fatto che p = 10^{-8} è comunque la frequenza di una persona su 10^8 nella popolazione — e che quindi «ci sono decine di persone in Italia con questo profilo» — come argomento contro l'evidenza. Questo trascura che la probabilità a posteriori è il prodotto del LR per la probabilità a priori: se le circostanze investigative già individuano un sottoinsieme ristretto di sospettati, il valore rilevante di P(¬H) è molto più basso di quello corrispondente alla popolazione intera.

Appendice E — Sviluppo Asintotico del Nucleo del Calore

Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione d e sia $K(x, y, t)$ il nucleo del calore. L'espansione asintotica completa di $Z(t) = \mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$ per $t \to 0^+$ è:

$$Z(t) \sim (4\pi t)^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

I coefficienti a_k — detti *coefficienti di Seeley-DeWitt* o *coefficienti spettrali* — sono integrali di invarianti geometrici locali:

$$a_0 = \int_M \mathrm{dVol}(M) \quad \text{(il volume riemanniano)}$$

$$a_1 = \frac{1}{6} \int_M R \, \mathrm{dVol}$$

dove R è la curvatura scalare di M (la traccia del tensore di Ricci, cioè la somma delle curvature sezionali in ogni punto).

$$a_2 = \frac{1}{360} \int_M \left(5R^2 - 2|\mathrm{Ric}|^2 + 2|\mathrm{Rm}|^2\right) \mathrm{dVol}$$

dove Ric è il tensore di Ricci, Rm è il tensore di curvatura di Riemann, e $|\cdot|^2$ denota la norma al quadrato del tensore.

I coefficienti a_k con k dispari si annullano per varietà senza bordo. Per varietà con bordo compaiono anche termini con potenze semintere di t, con coefficienti determinati dalla seconda forma fondamentale del bordo.

Il significato di questi coefficienti per il *problema inverso spettrale* è che lo spettro completo {λ_n} determina Z(t) per ogni t > 0, e quindi l'intero sviluppo asintotico, e quindi tutti i coefficienti a_k, e quindi tutti gli invarianti globali della curvatura di M. La domanda di Kac è se questi invarianti determinino completamente la varietà, e la risposta negativa di Gordon-Webb-Wolpert mostra che non è così: esistono informazioni geometriche — legate alla disposizione globale della curvatura, non ai suoi integrali — che non si manifestano nei coefficienti a_k e che quindi lo spettro non riesce a catturare.

Bibliografia

La bibliografia è organizzata per domini tematici, nell'ordine in cui i temi sono trattati nel saggio. All'interno di ciascun dominio, l'ordinamento è cronologico. Le edizioni indicate sono quelle adottate nelle citazioni; ove disponibile si segnala la traduzione italiana.

I. Algebra Lineare e Teoria degli Operatori

Halmos, Paul R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Princeton: Van Nostrand, 1942. Seconda edizione: Springer, 1974.

Gelfand, Israel M. *Lectures on Linear Algebra*. New York: Interscience, 1961. Trad. it.: *Lezioni di algebra lineare*. Roma: Editori Riuniti, 1979.

Reed, Michael; Simon, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. I: *Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1972.

Reed, Michael; Simon, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. IV: *Analysis of Operators*. New York: Academic Press, 1978.

Schatten, Robert. *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Berlin: Springer, 1960.

Simon, Barry. *Trace Ideals and Their Applications*. London: London Mathematical Society Lecture Note Series, 1979. Seconda edizione: Providence: American Mathematical Society, 2005.

Lang, Serge. *Algebra*. Third edition. New York: Springer, 2002.

Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Seconda edizione: 2013.

II. Meccanica Quantistica e Teoria dell'Informazione Quantistica

von Neumann, John. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer, 1932. Trad. ingl.: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1955.

Dirac, Paul A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1930. Quarta edizione: 1958.

Wootters, William K.; Zurek, Wojciech H. «A Single Quantum Cannot Be Cloned». *Nature*, 299 (1982), pp. 802–803.

Zurek, Wojciech H. «Decoherence and the Transition from Quantum to Classical». *Physics Today*, 44/10 (1991), pp. 36–44.

Joos, Erich et al. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Berlin: Springer, 1996. Seconda edizione: 2003.

Nielsen, Michael A.; Chuang, Isaac L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Lieb, Elliott H.; Ruskai, Mary Beth. «Proof of the Strong Subadditivity of Quantum-Mechanical Entropy». *Journal of Mathematical Physics*, 14 (1973), pp. 1938–1941.

Shannon, Claude E.; Weaver, Warren. *The Mathematical Theory of Communication*. Urbana: University of Illinois Press, 1949. Trad. it.: *La teoria matematica delle comunicazioni*. Milano: Etas Kompass, 1971.

III. Geometria Riemanniana, Teoria Spettrale e Formula della Traccia

Berger, Marcel; Gauduchon, Paul; Mazet, Edmond. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Berlin: Springer, 1971.

Weyl, Hermann. «Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen». *Mathematische Annalen*, 71 (1912), pp. 441–479.

Selberg, Atle. «Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces with Applications to Dirichlet Series». *Journal of the Indian Mathematical Society*, 20 (1956), pp. 47–87.

Hejhal, Dennis A. *The Selberg Trace Formula for PSL(2,ℝ)*, vol. I. Berlin: Springer, 1976. Vol. II: Springer, 1983.

Kac, Mark. «Can One Hear the Shape of a Drum?». *The American Mathematical Monthly*, 73/4 Part 2 (1966), pp. 1–23.

Gordon, Carolyn; Webb, David L.; Wolpert, Scott. «One Cannot Hear the Shape of a Drum». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27/1 (1992), pp. 134–138.

Atiyah, Michael F.; Bott, Raoul. «A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes». *Annals of Mathematics*, 86 (1967), pp. 374–407; 88 (1968), pp. 451–491.

Berline, Nicole; Getzler, Ezra; Vergne, Michèle. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Berlin: Springer, 1992.

Connes, Alain. *Noncommutative Geometry*. San Diego: Academic Press, 1994. Versione francese: *Géométrie Non Commutative*. Paris: InterEditions, 1990.

IV. Teoria degli Insiemi, Logica Matematica e Forcing

Zermelo, Ernst. «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre». *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261–281.

Gödel, Kurt. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1940.

Cohen, Paul J. «The Independence of the Continuum Hypothesis». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50 (1963), pp. 1143–1148; 51 (1964), pp. 105–110.

Cohen, Paul J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: W.A. Benjamin, 1966.

Kunen, Kenneth. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam: North-Holland, 1980.

Jech, Thomas. *Set Theory*. Terza edizione. Berlin: Springer, 2003.

V. Filosofia del Linguaggio, Decostruzione e Semiotica

Saussure, Ferdinand de. *Cours de linguistique générale*. Lausanne–Paris: Payot, 1916. Trad. it.: *Corso di linguistica generale*. Bari: Laterza, 1967.

Derrida, Jacques. *De la grammatologie*. Paris: Minuit, 1967. Trad. it.: *Della grammatologia*. Milano: Jaca Book, 1969.

Derrida, Jacques. *La voix et le phénomène*. Paris: Presses Universitaires de France, 1967. Trad. it.: *La voce e il fenomeno*. Milano: Jaca Book, 1968.

Derrida, Jacques. *L'écriture et la différence*. Paris: Seuil, 1967. Trad. it.: *La scrittura e la differenza*. Torino: Einaudi, 1971.

Derrida, Jacques. «La différance». In *Marges de la philosophie*. Paris: Minuit, 1972, pp. 1–29. Trad. it.: *Margini della filosofia*. Torino: Einaudi, 1997.

Derrida, Jacques. *La vérité en peinture*. Paris: Flammarion, 1978. Trad. it.: *La verità in pittura*. Roma: Newton Compton, 1981.

Husserl, Edmund. *Logische Untersuchungen*. Halle: Niemeyer, 1900–1901. Trad. it.: *Ricerche logiche*. Milano: Il Saggiatore, 1968.

Husserl, Edmund. *Zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins*. Halle: Niemeyer, 1928. Trad. it.: *Per la fenomenologia della coscienza interna del tempo*. Milano: Franco Angeli, 1981.

Peirce, Charles Sanders. *Collected Papers*. Voll. I–VI, a cura di Charles Hartshorne e Paul Weiss. Cambridge: Harvard University Press, 1931–1935. Voll. VII–VIII, a cura di Arthur Burks. Cambridge: Harvard University Press, 1958.

Peirce, Charles Sanders. *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition*. Bloomington: Indiana University Press, 1982–ss.

Eco, Umberto. *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi, 1984.

Eco, Umberto. *I limiti dell'interpretazione*. Milano: Bompiani, 1990.

Eco, Umberto; Sebeok, Thomas A. (a cura di). *The Sign of Three: Dupin, Holmes, Peirce*. Bloomington: Indiana University Press, 1983. Trad. it.: *Il segno dei tre*. Milano: Bompiani, 1983.

VI. Paleoicnologia e Paleontologia del Comportamento

Seilacher, Adolf. «Bathymetry of Trace Fossils». *Marine Geology*, 5 (1967), pp. 413–428.

Seilacher, Adolf. «Trace Fossil Analysis*. Berlin: Springer, 2007.

Bromley, Richard G. *Trace Fossils: Biology, Taphonomy and Applications*. Seconda edizione. London: Chapman & Hall, 1996.

Ekdale, Allan A.; Bromley, Richard G.; Pemberton, S. George. *Ichnology: The Use of Trace Fossils in Sedimentology and Stratigraphy*. Tulsa: Society of Economic Paleontologists and Mineralogists, 1984.

Narbonne, Guy M. «The Ediacara Biota: Neoproterozoic Origin of Animals and Their Ecosystems». *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 33 (2005), pp. 421–442.

Jensen, Sören. «The Proterozoic and Earliest Cambrian Trace Fossil Record: Patterns, Problems and Perspectives». *Integrative and Comparative Biology*, 43 (2003), pp. 219–228.

Knoll, Andrew H. *A Brief History of Earth: Four Billion Years in Eight Chapters*. New York: Custom House, 2021.

VII. Criminalistica, Medicina Legale e Epistemologia Forense

Locard, Edmond. *Traité de criminalistique*, 7 voll. Lyon: Joannès Desvigne, 1931–1940.

Kirk, Paul L. *Crime Investigation*. New York: Interscience, 1953.

Inman, Keith; Rudin, Norah. *Principles and Practice of Criminalistics: The Profession of Forensic Science*. Boca Raton: CRC Press, 2001.

Buckleton, John S.; Triggs, Christopher M.; Walsh, Simon J. (a cura di). *Forensic DNA Evidence Interpretation*. Boca Raton: CRC Press, 2005.

Robertson, Bernard; Vignaux, G.A.; Berger, Charles E.H. *Interpreting Evidence: Evaluating Forensic Science in the Courtroom*. Seconda edizione. Chichester: Wiley, 2016.

Thompson, William C.; Schumann, Edward L. «Interpretation of Statistical Evidence in Criminal Trials: The Prosecutor's Fallacy and the Defense Attorney's Fallacy». *Law and Human Behavior*, 11 (1987), pp. 167–187.

Bayesian Approaches in the Forensic Sciences: cfr. in particolare i lavori di Ian Evett e colleghi nei *Science & Justice* e nel *Journal of the Forensic Science Society* degli anni 1990–2010.

VIII. Epistemologia, Filosofia della Scienza e della Storia

Whewell, William. *The Philosophy of the Inductive Sciences, Founded upon Their History*. Londra: Parker, 1840.

Peirce, Charles Sanders. «Abduction and Induction». In *Philosophical Writings of Peirce*, a cura di J. Buchler. New York: Dover, 1955, pp. 150–156.

Reichenbach, Hans. *The Direction of Time*. Berkeley: University of California Press, 1956.

Hempel, Carl G. *Aspects of Scientific Explanation*. New York: Free Press, 1965. Trad. it.: *Aspetti della spiegazione scientifica*. Bologna: Il Mulino, 1986.

Gadamer, Hans-Georg. *Wahrheit und Methode*. Tübingen: Mohr, 1960. Trad. it.: *Verità e metodo*. Milano: Bompiani, 1983.

Kuhn, Thomas S. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press, 1962. Trad. it.: *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*. Torino: Einaudi, 1969.

Quine, Willard Van Orman. «Two Dogmas of Empiricism». *Philosophical Review*, 60 (1951), pp. 20–43.

Ginzburg, Carlo. «Spie: radici di un paradigma indiziario». In Aldo Gargani (a cura di), *Crisi della ragione*. Torino: Einaudi, 1979, pp. 57–106. Poi in *Miti, emblemi, spie*. Torino: Einaudi, 1986.

Price, Huw. *Time's Arrow and Archimedes' Point: New Directions for the Physics of Time*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

Ricoeur, Paul. *Temps et Récit*, 3 voll. Paris: Seuil, 1983–1985. Trad. it.: *Tempo e racconto*. Milano: Jaca Book, 1986–1988.

Ricoeur, Paul. *La Mémoire, l'Histoire, l'Oubli*. Paris: Seuil, 2000. Trad. it.: *La memoria, la storia, l'oblio*. Milano: Raffaello Cortina, 2003.

Wimsatt, William C. *Re-Engineering Philosophy for Limited Beings*. Cambridge: Harvard University Press, 2007.

IX. Identità Personale, Memoria e Neuroscienze

Locke, John. *An Essay Concerning Human Understanding*. London: Basset, 1689. Trad. it.: *Saggio sull'intelletto umano*. Bari: Laterza, 1972.

Hume, David. *A Treatise of Human Nature*. London: John Noon, 1739–1740. Trad. it.: *Trattato sulla natura umana*. Bari: Laterza, 1975.

Bartlett, Frederic C. *Remembering: A Study in Experimental and Social Psychology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1932.

Parfit, Derek. *Reasons and Persons*. Oxford: Oxford University Press, 1984. Trad. it.: *Ragioni e persone*. Milano: Il Saggiatore, 1989.

Loftus, Elizabeth F. «The Reality of Repressed Memories». *American Psychologist*, 48 (1993), pp. 518–537.

Schacter, Daniel L. *The Seven Sins of Memory: How the Mind Forgets and Remembers*. Boston: Houghton Mifflin, 2001. Trad. it.: *I sette peccati della memoria*. Milano: Mondadori, 2002.

Nader, Karim; Schafe, Glenn E.; LeDoux, Joseph E. «Fear Memories Require Protein Synthesis in the Amygdala for Reconsolidation after Retrieval». *Nature*, 406 (2000), pp. 722–726.